1) $\dfrac{-2}{3}x+\dfrac{5}{6}>\dfrac{1}{4} \iff 12(\dfrac{-2}{3}x+\dfrac{5}{6})>12\dfrac{1}{4}$ (C 061)

$\iff -8x+10>3 \iff -8x>-7 \iff x<\frac{7}{8}$

On résout une inéquation, donc les équivalences sont indispensables

2) Vrai ou Faux ? ...**Faux** (C 583a)

Pour $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 1 \Rightarrow 2x^2+1\neq 3$

il suffit de prendre $x=-1$

3) Dans $\mathbb{R}$: $\tan x=-1 \iff x=\dfrac{-\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ (C 104d)

4) $\cos a\ \cos b=\ \dfrac{1}{2}\big[\cos(a+b)+\cos(a-b)\big]$ (C 150a)

5) Pour $z\in\mathbb{C}$, $z-\bar{z}=\ 2\mathbf{i}.\mathrm{Im}(z)$ (C 205d)

6) $\forall z,z'\in\mathbb{C}^*,\ \arg(z)-\arg(z')=\ \arg(z/z')\ \ [2\pi]$ (C 222b)

$\arg(z)-\arg(z')=\dfrac{\arg(z)}{\arg(z')}$ est totalement absurde, car cela reviendrait à écrire $a-b=\dfrac{a}{b}$

$+k.\pi$ est indispensable car il y a une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$

7) $\mathrm{e}^{\mathbf{i}nx}=\cos(nx)+\mathbf{i}\sin(nx)=\big(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}\big)^n=\big(\cos x+\mathbf{i}\sin x\big)^n$ (C 236b)

8) Définition : $z\in\mathbb{C}$, (C 245a)

$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\mathrm{e}^{\mathbf{i}.\mathrm{Im}(z)}=\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\big(\cos(\mathrm{Im}(z))+\mathbf{i}.\sin(\mathrm{Im}(z))\big)}$

On demande e^z donc il faut écrire un résultat qui dépend de z

9) Déf : $z\in\mathbb{C}$ est une racine n-ième de l'unité $\iff z^n=1$ (C 250a)

10) Les racines cubiques de l'unité sont : (C 253d)

$z_0=1,\quad z_1=\mathrm{e}^{\mathbf{i}2\pi/3}=\dfrac{-1}{2}+\mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad z_2=\mathrm{e}^{\mathbf{i}4\pi/3}=\mathrm{e}^{-\mathbf{i}2\pi/3}=\dfrac{-1}{2}-\mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

11) 3 points distincts A, B, C d'affixes respectives a, b, $c\in\mathbb{C}$ (C 351d)

$$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\ \arg\left(\frac{z(\overrightarrow{BA})}{z(\overrightarrow{BC})}\right)=\arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right)\quad[2\pi]$$

Il est impératif de distinguer les points (géométrie) et leurs affixes (complexes)

Écrire a,b,c sont alignées ou bien $\arg\left(\dfrac{A-B}{C-B}\right)$ est également absurde

Il ne faut oublier les flèches pour les vecteurs :

$\overrightarrow{BA}$ est un vecteur BA est une distance

12) Soient 3 points distincts A, B, C d'affixes a, b, c (C 358c)

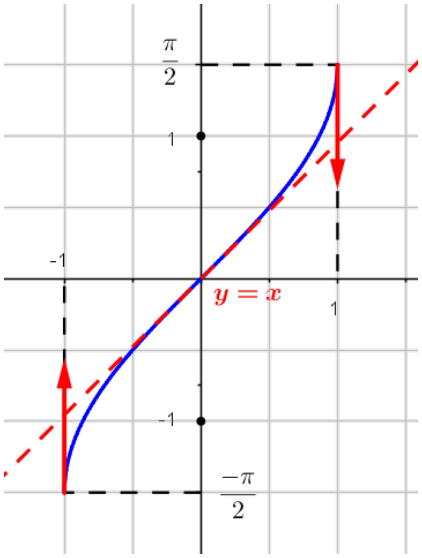
Interprétation géométrique :

$\dfrac{c-a}{b-a}\in\mathbb{R} \iff A,\ B,\ C$ sont alignés

$\iff \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

13) $(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x\in]-1,1[$ (C 431a)

14) Tracer l'allure de la courbe de $x \mapsto \arcsin x$ (C 450)



15) (u_n) arithmétique $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$ (C 511b)

16) $\displaystyle\sum_{0\le j<k\le n} a_{j,k} = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} a_{j,k}$ (C 535a)

$\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{k=j+1}^{n} a_{j,k}$ est **faux** car dans la première somme, j ne peut pas dépendre de l'indice k qui n'est défini qu'après dans la deuxième somme.

D'autre part, l'inégalité $j<k$ est **stricte**
donc $j<k\le n \Rightarrow j<n$ et j doit donc s'arrêter en $n-1$

17) $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$ (C 565a)

18) Définition : Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ (C 600c)

$\lfloor x\rfloor = y \iff x = y+\alpha$ avec $y\in\mathbb{Z}$, $\alpha\in[0,1[$

$\iff$ $\boxed{y\in\mathbb{Z} \text{ et } y\le x<y+1}$

Ne pas oublier que $y\in\mathbb{Z}$.

D'autre part, on ne peut pas utiliser la partie entière pour définir la partie entière. Cela n'aurait pas de sens. Ainsi écrire :

$\lfloor x\rfloor = y \iff x\le\lfloor x\rfloor<x+1$

ne définit nullement la partie entière, puisque cela utilise la partie entière. Donc pour savoir si cela est vrai, il faudrait savoir ce que c'est que la partie entière. C'est le serpent qui se mord la queue : un *oroubos* .

En plus, y n'intervient pas, ce qui est quand même étrange !

19) Définition de la factorielle : $\begin{cases} 0! = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)! = (n+1)\times n! \end{cases}$ (C 620)

Dans une définition par récurrence il faut 1) une relation de récurrence, et ne pas oublier 2) l'initialisation

Et de plus préciser que la relation est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$

20) $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p}$ valable pour $1\le p\le n-1$ (C 632a)

$1\le p$ pour que $\binom{n-1}{p-1}$ existe

$p\le n-1$ pour que $\binom{n-1}{p}$ existe

21) Soit (E) une équation d'inconnue x et d'ensemble solution S. (C 713b)

« 3 et 7 sont les seules solutions possibles de (E) »

Est équivalent à : $S\subset\{3;7\}$

En effet, l'ensemble des solutions ne peut contenir au maximum que 3 et 7. Et ce sont des solution **possibles** (et donc pas certaines)
Donc S est inclus dans $\{3;7\}$ (et pas nécessairement égal)

22) Vrai ou Faux ? . . . . . **Faux** (C 725a)

La proposition suivante dépend de A

$$\forall x \in E,\ \exists A \in F,\ \forall y \in E,\ |x-y| < A \Rightarrow |f(x)-f(y)| < 1$$

En effet A est quantifié, donc la proposition ne dépend pas de A

23) $x \notin A \cup B \iff x \notin A$ ET $x \notin B$ (C 742b)

C'est la négation de $x \in A \cup B \iff (x \in A$ OU $x \in B)$

24) Soit f une bijection de E sur F (C 757b)

Alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$

En effet on compose d'abord par f^{-1} donc il faut démarrer de l'ensemble F : $f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = y$ pour $x \in F$
On obtient donc l'application identité de F

25) Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications (C 768a)

$f \circ g : F \to F$ est définie par : $\forall x \in F,\ (f \circ g)(x) = f[g(x)]$

Définir une fonction, c'est donner

- son ensemble de départ,
- son ensemble d'arrivée,
- la valeur qu'elle prend en x (cad la façon dont cette valeur peut être calculée)

26) Vrai ou Faux ? . . . **Faux** (C 902c)

Le domaine de définition de arcsin est $\left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est le domaine des valeurs de arcsin.
Son domaine de définition est $[-1; 1]$

27) Tableau de variations complet de *arccos* (C 907b)

x	-1		0		1
arctan	π	$\searrow$	$\pi/2$	$\searrow$	0

28) $\arctan \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = \dfrac{-\pi}{6}$ (C 912c)

Surtout pas de modulo π ou $+k\pi$ car il n'y a qu' **une seule** valeur qui convient

29) $\arccos(\sin(\frac{\pi}{8}) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) = \arccos(\cos(\frac{3\pi}{8}) = \frac{3\pi}{8}$ (C 915d)

car $\frac{3\pi}{8} \in [0, \pi]$

30) Pour $a \in [-1, +1]$, $\arccos a = \frac{\pi}{5} \iff a = \cos\frac{\pi}{5}$ (C 920d)

31) Soit f continue et strictement décroissante sur l'intervalle $I = [a, b[$
Alors f réalise une bijection ... (C 1080c)

de $I = [a, b[$ sur $J = f(I) = \left]\lim\limits_{x \to b} f(x); f(a)\right]$

Explications

- f est décroissante donc il faut inverser les bornes dans $f(I)$.
- f définie sur $[a,b[$, donc pas définie en b. $f(b)$ n'existant, il faut remplacer par la limite.
- Par contre f est définie en a, donc pas besoin de chercher la limite en a

32) Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[,\ x \mapsto 4x + \sqrt{2x}$ (C 1087b)

On admet que f est bijective et on note f^{-1} sa réciproque

Calculer $f(2)$, justifier que f^{-1} est dérivable en 2
et déterminer $(f^{-1})'(10)$

$f(2) = 8 + 2 = 10 \quad f'(x) = 4 + \dfrac{2}{2\sqrt{2x}} \Rightarrow f'(2) = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

f est dérivable en 2 et $f'(2) \neq 0$

Donc f^{-1} est dérivable en $10 = f(2)$ et $(f^{-1})'(10) = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{2}{9}$