

Durée de l'épreuve : 4h

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'appréciation **des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

### Problème n°1 : Etude d'un moteur Diesel

Le moteur des locomotives diesel fut inventé en 1892 par l'ingénieur allemand Rudolf Diesel. Les premières locomotives « Diesel-mécanique » où la puissance est transmise par l'intermédiaire d'une boîte de vitesse à pignons furent rapidement remplacées par des locomotives « Diesel-électrique » où le moteur diesel, en tournant, entraîne un alternateur. Ce dernier fournit de l'énergie à plusieurs moteurs électriques de traction.

On modélise le fonctionnement d'un moteur Diesel en considérant un système fermé, constitué de  $n$  moles de gaz parfait diatomiques, décrivant le cycle réversible dont les caractéristiques sont décrites ci-dessous :

- Admission  $A_0A$  : la soupape d'arrivée de l'air est ouverte, celles d'arrivée de gasoil et celle d'échappement des gaz sont fermées. La pression est  $P_{atm} = 1,00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  et la température  $T_{atm} = 300 \text{ K}$ . Le volume passe de  $V_{min}$  à  $V_{max}$  de façon isobare.
- Compression  $AB$  : les soupapes sont fermées. Le volume de l'air admis passe de  $V_{max}$  à  $V_{min}$  de manière adiabatique et réversible.
- Injection et combustion  $BC$  : les soupapes sont fermées, sauf celle d'injection du gasoil. Une petite quantité de gasoil est injectée et la combustion se produit. Le volume augmente jusqu'à  $V_C$ . On modélise cette phase par une évolution isobare.
- Détente  $CD$  : les soupapes sont toutes fermées. L'injection cesse en  $C$  et le mélange subit une détente adiabatique et réversible jusqu'à atteindre un volume  $V_{max}$ .
- Refroidissement  $DA$  : la soupape d'échappement est ouverte. La pression diminue brutalement jusqu'à  $P_{atm}$  et le volume reste constant.
- Ejection  $AA_0$  : la soupape d'échappement est ouverte, les autres fermées. Le volume passe de  $V_{max}$  à  $V_{min}$  de façon isobare.

1) Représenter le cycle Diesel  $A_0ABCDAA_0$  dans le diagramme de Watt ( $P, V$ ).

2) On définit le rapport volumétrique de compression  $x = V_{max}/V_{min}$  ainsi que le rapport volumétrique de détente  $y = V_{max}/V_C$ . Exprimer les pressions  $P_B$  et  $P_D$  en fonction de  $P_{atm}$ ,  $x, y$  et du rapport  $\gamma = C_{pm}/C_{vm}$  des capacités thermiques molaires à pression et à volume constant du gaz considéré. Calculer  $P_B$  et  $P_D$ .

3) Définir le rendement thermodynamique, noté  $\eta_D$  pour ce moteur et l'exprimer en fonction des températures  $T_A, T_B, T_C, T_D$  et du rapport  $\gamma$ .

4) Montrer que  $\eta_D$  peut s'exprimer sous la forme :

$$\eta_D = 1 - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{y^{-\gamma} - x^{-\gamma}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}} \right)$$

puis faire l'application numérique en utilisant les données fournies en fin d'énoncé. En réalité, le rendement observé est de l'ordre de 0,45. Commenter.

5) Une locomotive à moteur Diesel roule à la vitesse constante  $v = 140 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Le moteur tourne à la vitesse angulaire, elle aussi constante, de  $2000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ , un tour correspondant à un cycle du moteur. Déterminer le transfert thermique  $Q_C$  sur un cycle puis la consommation du moteur en gasoil pour 100 km. Calculer la puissance mécanique moyenne du moteur de la locomotive (en utilisant la valeur du rendement observé).

### Données :

Volume maximal du gaz dans le cycle diesel :  $V_{max} = 57 L$

Rapports des volumes dans le cycle diesel :  $x = V_{max}/V_{min} = 20$  et  $y = V_{max}/V_C = 7,0$

Rapport des capacités thermiques :  $\gamma = C_{pm}/C_{vm} = 1,4$

Rappel des expressions des capacités thermiques molaires à volume et à pression constante :  $C_{vm} = R/(\gamma - 1)$  et  $C_{pm} = \gamma \cdot R/(\gamma - 1)$

Constante des gaz parfaits :  $R = 8,31 J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$

Enthalpie de combustion massique du gasoil :  $\Delta h_{GO} = 46,8 MJ \cdot kg^{-1}$

## Problème n°2 : Modélisation d'une machine frigorifique

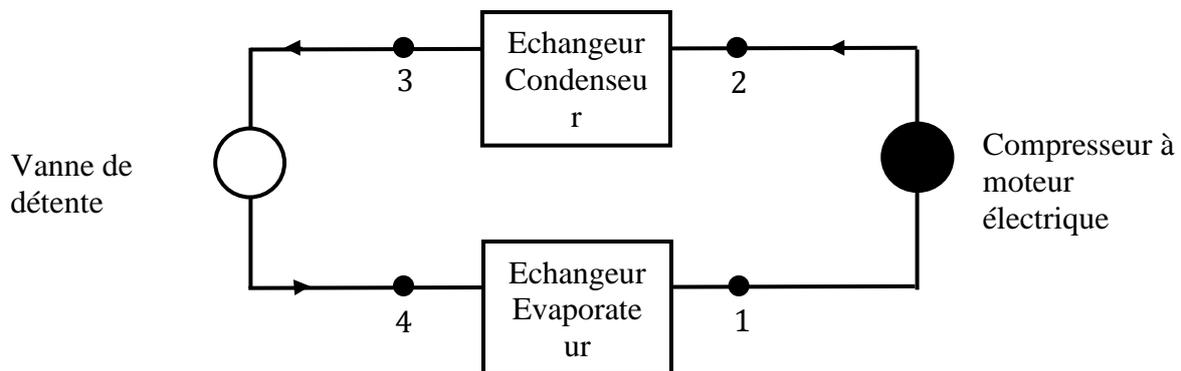
### Présentation générale

Un des enjeux majeurs de la grande distribution, de l'industrie et du tertiaire dans les années à venir sera de diviser sa consommation d'énergie de moitié. La production frigorifique d'un magasin représente entre 40 et 60 % de la consommation électrique (selon la superficie). La production de froid doit être efficace malgré toutes les perturbations d'ouverture et de fermeture des portes des congélateurs.

Aujourd'hui, de nouveaux types de machines permettent d'adapter la puissance du compresseur aux besoins de l'installation frigorifique en effectuant un réglage en continu de la vitesse du compresseur. Ce type d'installation permet de gagner jusqu'à 25 % de consommation d'énergie. Ce sujet a pour objectif de comprendre un modèle simple du cycle frigorifique et de pointer les paramètres affectant l'efficacité thermodynamique de la machine. Le contrôle en vitesse du compresseur permet de commander la puissance thermique soutirée à la source froide (nommée "puissance frigorifique").

### Modélisation du cycle frigorifique

La machine frigorifique est constituée de quatre organes, représentés ci-dessous :



Le fluide frigorigène circulant entre les différents organes est le 1,1,1,2-Tétrafluoroéthane, noté "R134a" par la suite. Le document fourni en annexe représente en coordonnées  $(h, \ln P)$  les transformations subies par ce fluide au cours d'un cycle (avec  $h$  enthalpie massique du fluide) :

- 1 → 2 : compression isentropique du fluide par le compresseur
- 2 → 3 : échange thermique isobare à haute pression  $P_{hp}$  dans le condenseur
- 3 → 4 : détente adiabatique dans le détendeur
- 4 → 1 : échange thermique isobare à basse pression  $P_{bp}$  dans l'évaporateur

En plus du cycle, d'autres courbes apparaissent sur le diagramme :

- la courbe de saturation liquide-vapeur (courbe noire en forme de cloche)
- un réseau d'isothermes (courbes en trait plein, tracées à  $T = C^{te}$ ) où les températures sont exprimées en degrés Celsius.
- un réseau d'isentropiques (courbes en pointillés, tracées à entropie massique  $s = C^{te}$ )
- un réseau d'iso-titres en vapeur à l'intérieur de la courbe de saturation (courbes en pointillés tracées à l'intérieur de la courbe de saturation, à titre en vapeur  $x = C^{te}$ )

A l'intérieur de la courbe de saturation, le fluide est diphasé liquide-vapeur. A gauche de la courbe de saturation, le fluide est liquide. A droite, le fluide est gazeux. Seul le début des courbes isothermes est représenté dans les diagrammes situés à gauche et à l'intérieur de la courbe de saturation. Cela permet d'alléger le diagramme, les isothermes étant horizontales à l'intérieur de la courbe de saturation et verticales à sa gauche.

Données concernant le fluide R134a :

- Masse volumique aux différents points du cycle (en  $kg.m^{-3}$ ) :  
 $\mu_1 = 4,2$        $\mu_2 = 45,5$        $\mu_3 = 1,3.10^3$        $\mu_4 = 12,5$
- Ordre de grandeur des capacités thermiques massiques :  $c_V \sim c_P \sim c \sim 1 kJ.kg^{-1}.K^{-1}$  (ordres de grandeur valables pour la phase liquide et pour la phase vapeur).

On rappelle l'expression du premier principe de la thermodynamique en écoulement stationnaire appliqué à un système ouvert :

$$\Delta \left( h + \frac{1}{2} v^2 + g.z \right) = w_u + q$$

avec :

- $\Delta h = h_{sortie} - h_{entrée}$  : variation d'enthalpie massique entre l'entrée et la sortie
- $\Delta \left( \frac{1}{2} v^2 \right)$  : variation d'énergie cinétique massique du fluide entre l'entrée et la sortie
- $\Delta(g.z)$  : variation d'énergie potentielle massique de pesanteur entre l'entrée et la sortie
- $w_u$  travail massique utile, apporté au fluide par toute pièce mobile en contact avec lui
- $q$  transfert thermique massique reçu par le fluide

Notations : les grandeurs associées à l'état 1 du cycle sont indicées "1". Les quantités échangées entre le fluide et l'extérieur au cours de la transformation  $1 \rightarrow 2$  sont indicées par "12".

### I : Questions préalables sur le principe de fonctionnement d'une machine frigorifique

Le principe d'une machine frigorifique ditherme est le suivant : " un fluide frigorigène circule entre les différents organes de la machine. Mis en mouvement par le compresseur, ce fluide effectue des échanges énergétiques avec les deux sources."

I.1 : Rappeler le schéma de fonctionnement d'une machine frigorifique ditherme. Donner et justifier les signes des quantités suivantes :  $w_{12}$  ;  $q_{23}$  et  $q_{41}$ .

I.2: Si l'on considère le réfrigérateur que l'on possède à la maison, où se situe la source froide ? Et la source chaude ?

### II: Questions préalables sur l'expression utile du premier principe

II.1: On note  $D_m$  le débit massique défini par :  $D_m = \frac{\delta m}{dt}$  avec  $\delta m$  masse traversant une section  $S$  de canalisation pendant un intervalle de temps  $dt$ . En supposant le champ de pression et le champ de vitesse uniformes sur cette section, exprimer le débit massique à un endroit quelconque de la canalisation, en fonction de sa masse volumique  $\mu$ , de la section  $S$  et de la vitesse du fluide  $v$  à cet endroit.

II.2: D'après les données, on remarque que la masse volumique du fluide est minimale avant compression (état 1). En admettant que la section des canalisations est approximativement uniforme au cours du cycle, en déduire qu'en régime permanent la vitesse du fluide est maximale avant compression (état 1).

II.3: La vitesse maximale au cours du cycle est de l'ordre de  $1 m.s^{-1}$ . En prenant comme référence la variation d'enthalpie massique au cours de la compression, en déduire que les variations d'énergie cinétique peuvent être négligées dans l'expression du premier principe de la thermodynamique.

II.4: De la même façon, justifier que le terme  $(g.z)$  peut aussi être retiré de l'expression du premier principe de la thermodynamique. On utilisera par la suite l'expression simplifiée suivante du premier principe en écoulement stationnaire :

$$\Delta(h) = w_u + q$$

### III: Lecture du diagramme et intérêt de la vaporisation

Pour ne pas dégrader le compresseur, il est crucial que le fluide frigorigène soit purement gazeux à l'entrée de cet organe, toute goutte de liquide entraînant son usure prématurée. C'est pourquoi le fluide à la sortie de l'évaporateur est "surchauffé", sa température  $T_1$  dans l'état 1 est supérieure à celle de la vapeur saturante  $T_{sat}(P_{bp})$ . La surchauffe est une marge de sécurité qui permet de garantir que le fluide sera bien gazeux à l'entrée du compresseur, même si le fonctionnement de la machine est perturbé.

III.1: Déterminer graphiquement la valeur numérique de la *surchauffe* :  $T_1 - T_{sat}(P_{bp})$ .

III.2: Le fluide à la sortie du condenseur (état 3) est dit "sous-refroidi", sa température de sortie  $T_3$  est plus basse que la température de vapeur saturante  $T_{sat}(P_{hp})$ . Déterminer graphiquement la valeur numérique du *sous-refroidissement* :  $T_3 - T_{sat}(P_{hp})$ .

III.3: La transformation 3 → 4 est une détente de Joule-Thomson. Le détendeur peut-être assimilé à un simple étranglement local de la conduite. Il n'y a pas de pièce mobile et les parois sont calorifugées. Justifier que cette étape est isenthalpique.

III.4: Dans la zone située à gauche de la courbe de saturation, les isothermes sont verticales. Justifier.

III.5: La suite de la détente provoque une vaporisation de R134a. Etablir qu'au cours de cette vaporisation, la variation d'enthalpie massique peut s'écrire :

$$\Delta h = c \cdot (T_4 - T_3) + l_{vap}(T_4) \cdot x_{vap}$$

avec  $l_{vap}(T_4) = h_{vap}(T_4) - h_{liq}(T_4)$  : enthalpie massique de vaporisation à la température  $T_4$  et  $x_{vap}$  le titre en vapeur dans l'état 4. On justifiera clairement la démarche utilisée.

III.6: Mesurer graphiquement  $l_{vap}(T_4)$  ainsi que le titre en vapeur dans l'état 4. En déduire un ordre de grandeur numérique de la variation de température ( $T_4 - T_3$ ) attendue lors de la transformation 3 → 4. Cette valeur est-elle du même ordre de grandeur que celle lue sur le diagramme ?

### IV: Efficacité de la machine frigorifique

IV.1: Quel phénomène faut-il négliger pour modéliser les échanges thermiques considérés comme étant isobares ?

IV.2: Quelles hypothèses faut-il faire pour modéliser la compression comme étant isentropique ?

On rappelle la définition de l'efficacité d'une machine thermique :

$$e = \left| \frac{\text{énergie massique utile}}{\text{énergie massique coûteuse}} \right|$$

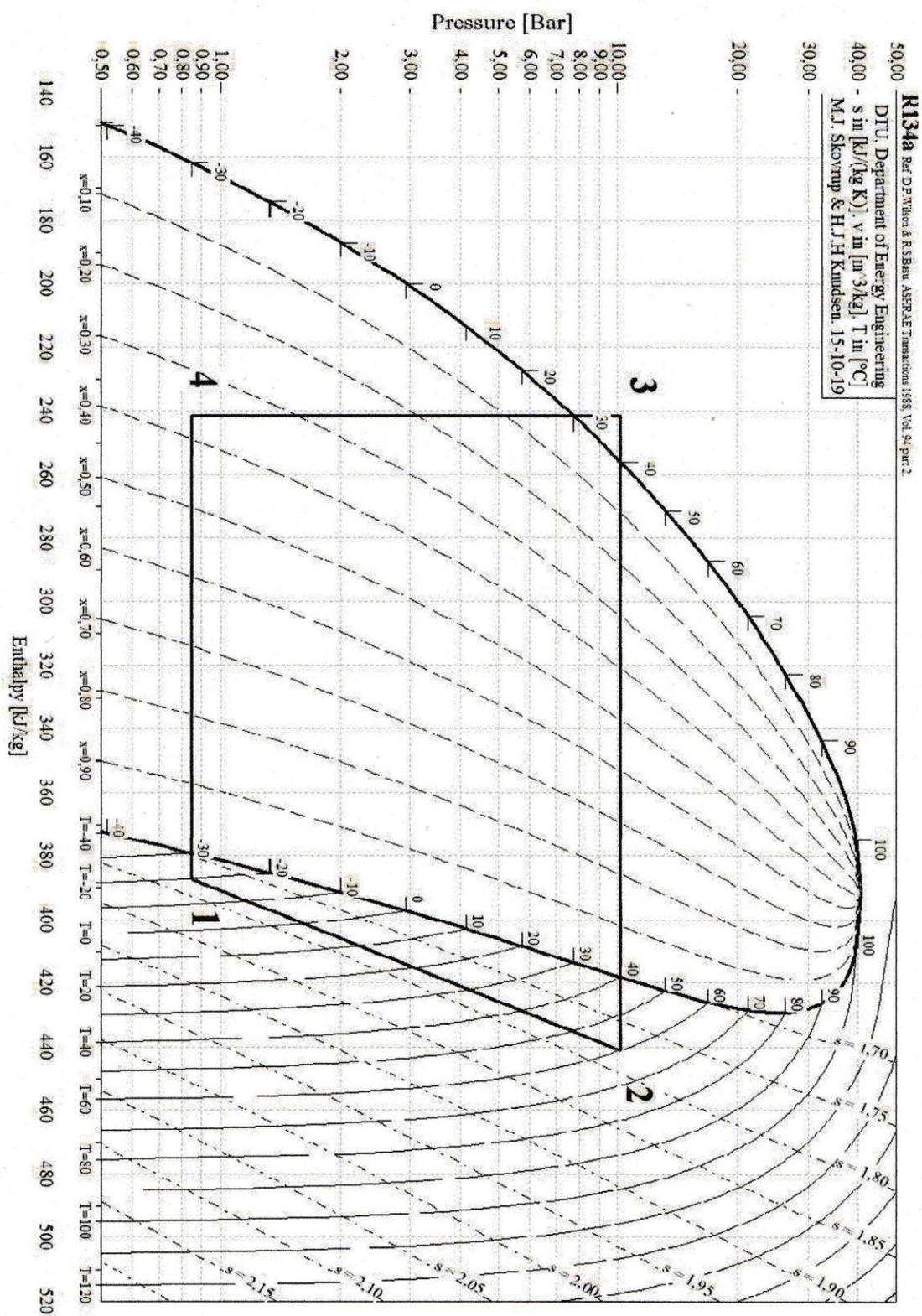
IV.3: A quoi correspondent ces deux termes énergétiques dans le cas de la machine frigorifique et identifier dans le cycle la transformation associée à chacun. Déterminer leur valeur numérique par lecture graphique sur le diagramme ( $h, \ln P$ ). En déduire la valeur de l'efficacité.

IV.4: En appliquant à 1,0 kg de fluide frigorigène les deux principes de la thermodynamique sur un cycle réversible, établir l'expression de l'efficacité de Carnot en fonction des températures de la source froide  $T_f$  et de la source chaude  $T_c$ . Faire l'application numérique avec  $T_c = 40^\circ\text{C}$  et  $T_f = -30^\circ\text{C}$  et comparer cette valeur à l'efficacité calculée dans le cadre du modèle étudié. Le résultat de cette comparaison était-il prévisible ? Quelles sont les sources d'irréversibilité du cycle avec lequel a été modélisé la machine frigorifique ?

IV.5: Aucune transformation réelle n'est réversible. La compression qui amène le fluide de  $P_{bp}$  à  $P_{hp}$  est nécessairement irréversible, contrairement à l'hypothèse simplificatrice de notre modèle. Proposer une modification simple de l'allure de la courbe 1 → 2 du diagramme ( $h, \ln P$ ) pour tenir compte de l'irréversibilité. En déduire graphiquement une conséquence sur l'efficacité.

IV.6: Expliquer en quoi le sous-refroidissement permet d'augmenter l'efficacité de la machine, tous les autres paramètres étant gardés identiques.

Document annexe :



- Cycle subi par le fluide R134a, en coordonnées Pression - Enthalpie massique (tracé avec le logiciel CoolPack)

## Problème n°3 : Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

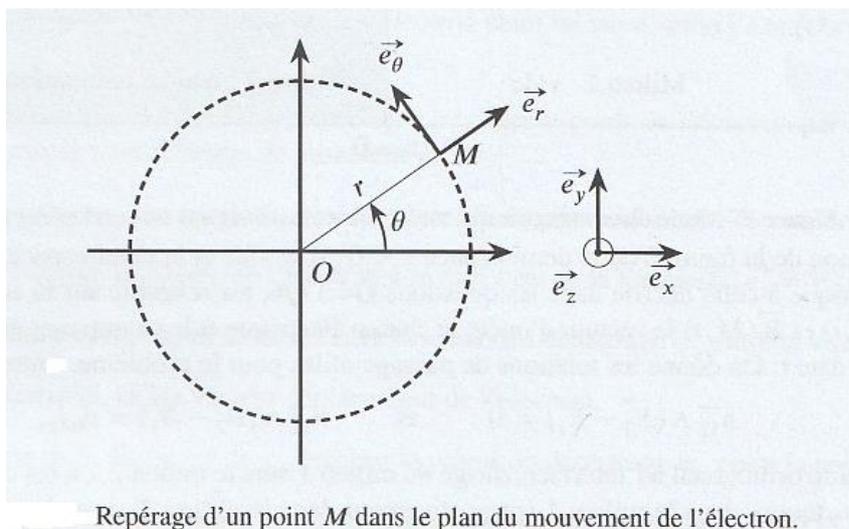
Données :

Grandeur	Notation	Valeur numérique
Célérité des ondes électromagnétiques dans le vide	$c$	$3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck	$h$	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité du vide	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	$e$	$1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Masse d'un électron	$m_e$	$9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

On s'intéresse à l'atome d'hydrogène dans le modèle de Bohr. Dans ce modèle, le proton est supposé immobile et placé à l'origine  $O$  du repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . L'électron est soumis au champ électrique coulombien du proton et on néglige l'effet de son poids. Le moment cinétique  $\vec{L}(O)$  de l'électron par rapport à  $O$  est quantifié :

$$\|\vec{L}(O)\| = n \cdot \left( \frac{h}{2\pi} \right) \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

1) Montrer que  $\vec{L}(O)$  est un vecteur constant. En déduire que le mouvement de l'électron est plan.



On introduit le vecteur unitaire  $\vec{e}_z$  de telle sorte que  $\vec{L}(O)$  soit de même direction et de même sens que  $\vec{e}_z$ . On introduit aussi la base locale cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ . Un point  $M$  du plan est repéré par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$  comme indiqué sur la figure ci-dessus. On note  $\vec{L}(O) = L(O) \cdot \vec{e}_z$

2) Exprimer  $L(O)$  en fonction de  $m_e$ ,  $r$  et de  $\dot{\theta}$ .

On suppose que l'électron est en mouvement circulaire autour du proton.

3) Justifier le fait que le mouvement de l'électron est uniforme.

4) Obtenir l'expression de la norme de la vitesse  $v = \|\vec{v}\|$  de l'électron en fonction de  $e$ ,  $m_e$ ,  $\epsilon_0$  et du rayon  $R$  de sa trajectoire.

5) En déduire que le rayon de la trajectoire s'écrit  $R = n^2 \cdot a_0$  où  $a_0$  est le rayon de Bohr que l'on exprimera en fonction de  $e$ ,  $m_e$ ,  $\epsilon_0$  et de  $h$ . Calculer numériquement  $a_0$ .

6) Citer la relation numérique entre le joule et l'électronvolt.

7) Montrer que l'énergie mécanique de l'électron s'écrit  $E_m = -E_0/n^2$  et donner l'expression de  $E_0$  en fonction de  $e$ ,  $m_e$ ,  $\epsilon_0$  et de  $h$ . Calculer la valeur numérique de  $E_0$  exprimée en joule et en eV.

8) Rappeler la relation de Planck-Einstein entre l'énergie d'un photon et sa longueur d'onde  $\lambda$ . Calculer, en joule et en eV, l'énergie d'un photon de longueur d'onde  $\lambda = 600 \text{ nm}$ .

Lorsqu'un photon est absorbé par un atome d'hydrogène, cela provoque une transition d'un niveau d'énergie repéré par l'entier  $n$  vers un niveau d'énergie repéré par un entier  $p$ .

9) Donner, en fonction de  $E_0, h, c, n$  et de  $p$ , l'expression des longueurs d'onde  $\lambda_{n,p}$  des photons susceptibles d'être absorbés.

10) On admet que les transitions associées à des longueurs d'onde dans le visible sont obtenues pour  $n = 2$ . Donner les valeurs de  $p$  et  $\lambda_{2,p}$  correspondant effectivement à une longueur d'onde dans le visible.

11) Que vaut l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène, c'est-à-dire l'énergie minimale à fournir pour que l'électron échappe à l'attraction coulombienne du proton ?