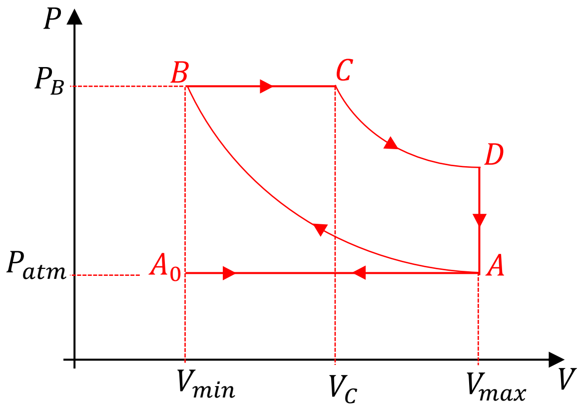
CLASSES DE PCSI 1 et 3 -Sujet A- D.S N° 8 DE PHYSIQUE

Problème n°1 : Etude d'un moteur Diesel

1) Allure du cycle Diesel dans un diagramme de Watt :



On vérifie que le cycle est décrit dans le sens horaire donc $W < 0$: **cycle moteur**

2) Les évolutions AB et CD sont isentropiques. Si on assimile le gaz à un gaz parfait, il vérifie la relation de Laplace $P.V^\gamma = \text{cte}$. On établit que :

$$P_A.V_A^\gamma = P_B.V_B^\gamma$$

$$P_B = P_A.\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^\gamma = P_{atm}.\left(\frac{V_{max}}{V_{min}}\right)^\gamma$$

Sachant que $x = V_{max}/V_{min}$:

$$\boxed{P_B = P_{atm}.x^\gamma}$$

De la même manière on peut poser que :

$$P_D = P_C.\left(\frac{V_C}{V_D}\right)^\gamma = P_B.\left(\frac{V_C}{V_{max}}\right)^\gamma = P_B.y^{-\gamma}$$

Sachant que $P_B = P_{atm}.x^\gamma$:

$$\boxed{P_D = P_{atm}.\left(\frac{x}{y}\right)^\gamma}$$

A.N. : $P_B = 66{,}3.10^5$ Pa et $P_D = 4{,}35.10^5$ Pa.

3) On note η_D le rendement du moteur défini par :

$$\boxed{\eta_D = \left|\frac{\text{énergie utile}}{\text{énergie dépensée}}\right|}$$

Dans un moteur : $W < 0$, $Q_C > 0$ et $Q_F < 0$. La « vocation » d'un moteur est de fournir un travail donc :

$$\eta_D = \left|\frac{W}{Q_C}\right| = -\frac{W}{Q_C}$$

Appliquons le premier principe sur un cycle : $W + Q_F + Q_C = 0$ donc $W = -Q_F - Q_C$:

$$\eta_D = \frac{Q_C + Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C}$$

Le transfert thermique Q_C s'effectue sur l'isobare BC, on peut donc poser que :

$$Q_C = \Delta H_{B\to C} = n.C_{pm}.(T_C - T_B)$$

Le transfert thermique Q_F s'effectue sur l'isochore DA donc :

$$Q_F = \Delta U_{D\to A} = n.C_{vm}.(T_A - T_D)$$

On en déduit que :

$$\eta_D = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{C_{vm}}{C_{pm}}\left(\frac{T_A - T_D}{T_C - T_B}\right)$$

$$\boxed{\eta_D = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}\right)}$$

4) Afin d'établir l'expression attendue rappelons la relation de Laplace relative au couple (T,V) pour une évolution isentropique :

$$T.V^{\gamma-1} = \text{cte}$$

On peut donc poser que $T_D.V_D^{\gamma-1} = T_C.V_C^{\gamma-1}$ ainsi :

$$T_D = T_C.\left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} = T_C.\left(\frac{V_C}{V_{max}}\right)^{\gamma-1} = T_C.y^{1-\gamma}$$

De la même manière posons que :

$$T_A = T_B.\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = T_B.\left(\frac{V_{min}}{V_{max}}\right)^{\gamma-1} = T_B.x^{1-\gamma}$$

En explicitant :

$$\eta_D = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{T_C.y^{1-\gamma} - T_B.x^{1-\gamma}}{T_C - T_B}\right)$$

En divisant par T_B et en notant que :

$$\frac{T_C}{T_B} = \frac{P_C.V_C}{P_B.V_B} = \frac{V_C}{V_B} = \frac{V_C}{V_{min}} = \frac{V_C}{V_{max}}\frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{x}{y}$$

On établit que :

$$\eta_D = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\left(\frac{x}{y}\right).y^{1-\gamma} - x^{1-\gamma}}{\left(\frac{x}{y}\right) - 1}\right)$$

En divisant par x on vérifie que :

$$\boxed{\eta_D = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{y^{-\gamma} - x^{-\gamma}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}}\right)}$$

A.N. : $\eta_D = 0{,}61$. Le rendement observé est inférieur au rendement théorique. On peut supposer que ceci est en partie dû à :

- la viscosité du fluide qui induit un cycle parasite anti-horaire (sur les phases d'admission et d'échappement du fluide). Ce cycle vient se soustraire au cycle moteur.
- le facteur γ du mélange n'est pas celui d'un gaz parfait diatomique (le facteur γ expérimental est inférieur à 1,4).
- la compression AB et la détente CD ne sont pas réversibles (et donc isentropiques). Il y a création d'entropie ce qui limite le rendement du moteur.

5) Déterminons le transfert thermique Q_C :

$$Q_C = n.C_{pm}.(T_C - T_B)$$

Avec :

$$C_{pm} = \frac{\gamma.R}{\gamma - 1}; \quad T_B = T_A.x^{\gamma-1}; \quad T_A = T_{atm} \quad \text{et} \quad \frac{T_C}{T_B} = \frac{x}{y}$$

En explicitant :

$$Q_C = \frac{\gamma.n.R.T_{atm}.x^{\gamma-1}}{\gamma - 1}\left(\frac{x}{y} - 1\right)$$

En appliquant l'équation d'état des gaz parfaits : $n.R.T_{atm} = P_{atm}.V_{max}$:

$$\boxed{Q_C = \frac{\gamma.P_{atm}.V_{max}.x^{\gamma-1}}{\gamma - 1}\left(\frac{x}{y} - 1\right)}$$

A.N. : $Q_C = 123\ kJ$

Connaissant l'enthalpie de combustion massique du gasoil, on peut déterminer la masse de gasoil consommée par cycle :

$$\boxed{m_{GO}(1) = \frac{Q_C}{\Delta h_{GO}} = \frac{\gamma.P_{atm}.V_{max}.x^{\gamma-1}}{(\gamma - 1).\Delta h_{GO}}\left(\frac{x}{y} - 1\right)}$$

A.N. : $m_{GO}(1) = 2{,}62.10^{-3}\ \mathrm{kg.cycl^{-1}}$

Pour effectuer la distance $d = 100\ \mathrm{km}$ à la vitesse $v = 140\ \mathrm{km.h^{-1}}$ il faut un temps $t = d/v = 42{,}9$ min ce qui correspond à N cycles. Posons $\omega = 2000\ \mathrm{tr.min^{-1}}$:

$$N = \frac{\omega.d}{v}$$

On détermine la masse de gasoil consommée pour une distance de 100 km :

$$m_{GO}(100) = \frac{m_{GO}(1).\omega.d}{v}$$

En explicitant en fonction des données :

$$\boxed{m_{GO}(100) = \frac{\gamma.P_{atm}.V_{max}.x^{\gamma-1}.\omega.d}{(\gamma - 1).\Delta h_{GO}.v}\left(\frac{x}{y} - 1\right)}$$

A.N. : $m_{GO}(100) = 225\ \mathrm{kg}$

Connaissant le rendement du moteur Diesel :

$$W = -\eta_D.Q_C \quad (\text{avec } \eta_D = 0{,}45)$$

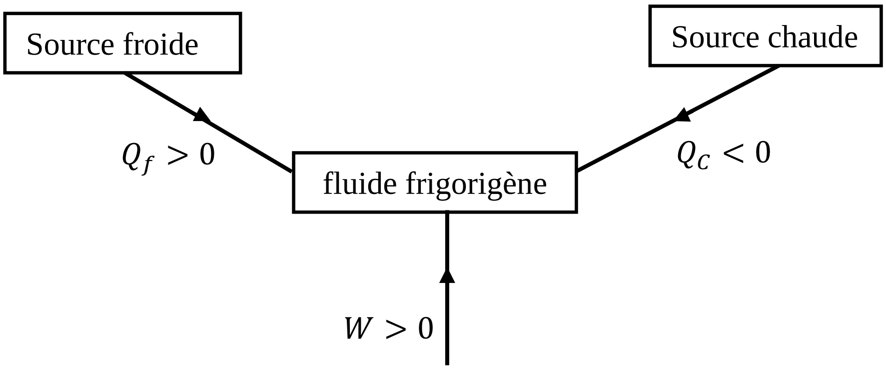
La puissance mécanique moyenne de la locomotive est donnée par :

$$\boxed{\mathcal{P}_m = -\eta_D.Q_C.\omega}$$

A.N. : $\mathcal{P}_m = 1{,}85\ 10^3 kW$

Problème n°2 : Modélisation d'une machine frigorifique

I.1 : Schéma de fonctionnement d'une machine frigorifique ditherme (en adoptant une convention récepteur pour le fluide) :



A partir des données, en grandeurs massiques, par identification on peut dire que :

$$q_f = q_{41} > 0$$
$$q_c = q_{23} < 0$$
$$w = w_{12} > 0$$

I.2 : La source chaude est le milieu extérieur au réfrigérateur. Le contact thermique entre le fluide et la source chaude s'effectue au niveau du serpentin situé à l'arrière du réfrigérateur. La source froide est constituée par « tout ce qu'il y a dans le réfrigérateur » (aliments et air). Le contact thermique avec la source froide s'effectue au niveau du serpentin intérieur ("freezer").

II.1 : Par analyse dimensionnelle, on peut dire que :

$$D_m = \frac{\delta m}{dt} = \mu.S.v$$

II.2 : En régime permanent, le débit massique est constant. Sachant que la section S est constante : $\mu.v = C^{te}$. La masse volumique est minimale avant la compression (état 1) donc la vitesse du fluide est maximale dans l'état 1 : $v_{max} = v_1$.

II.3 : Sachant que $\mu_1.v_1 = \mu_2.v_2$: $v_2 = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right).v_1$. La variation d'énergie cinétique massique au cours de la compression est :

$$(\Delta e_C)_{12} = \frac{1}{2}{v_2}^2 - \frac{1}{2}{v_1}^2 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 - 1\right).{v_1}^2$$

A.N. : $(\Delta e_C)_{12} = -0{,}5\,J.kg^{-1}$: on vérifie que $(\Delta e_C)_{12} \ll \Delta h_{12} \sim 50\,kJ.kg^{-1}$ (cf doc annexe).

II.4 : Les dimensions caractéristiques d'un réfrigérateur sont de l'ordre du mètre donc $\Delta(g.z) \sim 10\,J.kg^{-1}$. De la même manière, on peut faire l'hypothèse que : $\Delta(g.z) \ll \Delta h$. Dans la suite, nous appliquerons donc le premier principe pour les fluides en écoulement permanent sous la forme :

$$\Delta(h) = w_u + q$$

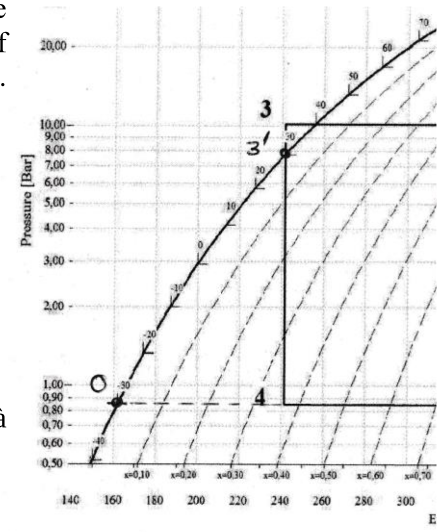
III.1 : Valeur numérique de la surchauffe : $T_1 - T_{sat}(P_{bp}) = -20 - (-30) = 10\ °C$

III.2 : Valeur numérique du *sous-refroidissement* : $T_3 - T_{sat}(P_{hp}) = 30 - (40) = -10\ °C$

III.3 : En appliquant le premier principe pour un fluide en écoulement permanent entre 3 → 4, sachant que l'évolution est adiabatique (parois calorifugées) et que le travail utile est nul (pas de pièces mobiles) on vérifie que la détente de Joule-Thomson est isenthalpique : $\Delta h_{34} = 0$.

III.4 : A gauche de la courbe de saturation, le fluide frigorigène est à l'état liquide donc sa variation d'enthalpie massique est donnée par : $\Delta h = c.\Delta T$. On en déduit que les isothermes sont confondues avec les isenthalpiques (verticales).

III.5 : L'enthalpie est une fonction d'état, donc sa variation ne dépend pas du chemin suivi pour aller de l'état $3'$ à l'état 4 (cf figure ci-contre) mais uniquement de l'état initial et de l'état final. Avec $\Delta h_{3'4} = \Delta h$ on peut donc poser que :



$$\Delta h = \Delta h_{3'0} + \Delta h_{04}$$

De l'état $3'$ à l'état 0 : le fluide est à l'état liquide donc :

$$\Delta h_{3'0} = c.(T_0 - T_{3'}) = c.(T_4 - T_3)$$
$$\text{avec } T_0 = T_4 \text{ et } T_{3'} = T_3$$

De l'état 0 à l'état 4 : le fluide subit une vaporisation partielle à température constante donc :

$$\Delta h_{04} = (x_4 - x_0).l_{vap}(T_4)$$

Avec $x_4 = x_{vap}$ et $x_0 = 0$ on établit que : $\Delta h_{04} = x_{vap}.l_{vap}(T_4)$

On vérifie que : $\Delta h = c.(T_4 - T_3) + x_{vap}.l_{vap}(T_4)$

III.6 : Mesures : $l_{vap}(T_4) = 380 - 160 = 220\ kJ.kg^{-1}$ et $x_{vap} = 0{,}35$. Sachant que l'évolution est isenthalpique :

$$T_4 - T_3 = -\frac{x_{vap}.l_{vap}(T_4)}{c}$$

A.N.: $T_4 - T_3 = -76\ °C$. En ordre de grandeur, nous retiendrons que la baisse de température est de l'ordre de quelques dizaines de degrés ce qui est en accord avec le diagramme sur lequel $T_4 - T_3 = -60\ °C$.

IV.1: Une évolution est isobare si la pression dans le fluide est constante et uniforme. Pour cela, il faut négliger la viscosité qui génère des gradients de pression.

IV.2: Pour qu'une évolution soit isentropique, il faut qu'elle soit adiabatique et réversible.

IV.3: Dans une machine frigorifique, l'énergie massique utile est celle qui est échangée avec la source froide, soit ici q_{41}. L'énergie massique coûteuse est celle que l'on paye, c.à.d. celle qui est utilisée pour alimenter le compresseur (énergie massique électrique), soit le travail utile w_u fourni de $1 \rightarrow 2$.

- De $4 \rightarrow 1$: appliquons le premier principe pour un fluide en écoulement permanent :

$$\Delta h_{41} = q_{41}$$

  Mesures : $q_{41} = \Delta h_{41} = h_1 - h_4 = 388 - 242 = 146\ kJ.kg^{-1}$. On vérifie que $q_{41} > 0$ comme annoncé à la question I.1.
- De $1 \rightarrow 2$: appliquons le premier principe pour un fluide en écoulement permanent, en notant que l'évolution est isentropique (donc adiabatique $q_{12} = 0$) : $\Delta h_{12} = w_u$.
  Mesures : $w_u = \Delta h_{12} = h_2 - h_1 = 440 - 388 = 52\ kJ.kg^{-1}$. On vérifie que $w_u > 0$.
- Efficacité de la machine frigorifique :

$$e = \left|\frac{q_{41}}{w_u}\right| = 2{,}8$$

IV.4: Soit $e_C = \left|\frac{Q_f}{W}\right| = \frac{Q_f}{W}$ le coefficient d'efficacité du cycle de Carnot. En appliquant le premier principe sur un cycle, on établit que : $Q_c + Q_f + W = 0$ donc $W = -(Q_c + Q_f)$.
Ainsi :

$$e_C = -\frac{Q_f}{Q_c + Q_f}$$

En appliquant le second principe sur un cycle réversible, on établit que : $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0$ soit $\frac{Q_c}{Q_f} = -\frac{T_c}{T_f}$ soit :

$$e_C = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

A.N.: $e_C = \frac{243}{313-243} = 3{,}5$ on vérifie que $e < e_C$ ce qui est en accord avec le théorème de Carnot.

Les phénomènes irréversibles dans le cycle réel limitent son efficacité. Sources d'irréversibilité : gradients de température et de pression, viscosité dans le fluide.

IV.5: Si l'évolution de 1 → 2 est adiabatique et irréversible, sachant que l'entropie créée est positive $\Delta s_{12} > 0$. Dans ces conditions, à pression P_{hp} égale, le point (2) est déplacé vers la droite ce qui augmente $\Delta h_{12} = w_u$ et diminue l'efficacité de la machine frigorifique.

IV.6: Le sous-refroidissement a pour effet de déplacer le point (3) (et donc le point (4)) vers la gauche ce qui augmente q_{41} et donc l'efficacité de la machine.

Problème n°3 : Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

1) On assimile l'électron à un point matériel M observé dans le référentiel de l'atome supposé galiléen. Dans cette étude, nous supposerons que l'électron n'est soumis qu'à la force d'interaction coulombienne :

$$\vec{F} = q.\vec{E} = \frac{-e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.r^2}\vec{u}_r$$

Appliquons le théorème du moment cinétique à l'électron :

$$\left(\frac{d\vec{L}(O)}{dt}\right)_R = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{L}(O) = \overrightarrow{\text{cte}}$$

Sachant que : $\vec{L}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge m.\vec{v}(M) = \overrightarrow{\text{cte}}$, par définition du produit vectoriel, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est dans un plan orthogonal à $\vec{L}(O)$, donc la trajectoire de l'électron est plane et le plan du mouvement passe par le centre de force.

2) Explicitons le moment cinétique dans la base de coordonnées polaires, pour une trajectoire circulaire :

$$\vec{L}(O) = r.\vec{u}_r \wedge m_e.(r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta) = m_e.r^2.\dot{\theta}.\vec{u}_z = L(O).\vec{e}_z$$

$$L(O) = m_e.r^2.\dot{\theta} = \text{cte}$$

3) Si $r = \text{cte}$ alors $\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$ donc $v = r.\omega = \text{cte}$: **le mouvement de l'électron est uniforme**.

4) Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'électron : $m.\vec{a}(M) = \vec{F}$. En explicitant puis en projetant sur $\vec{u}_r$:

$$-m_e.\left(\frac{v^2}{R}\right) = \frac{-e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.R^2}$$

On établit que :

$$\boxed{v = \frac{e}{\sqrt{4.\pi.\varepsilon_0.m_e.R}}}$$

5) Posons que : $L(O) = m_e.R^2.\omega = m_e.R.v$, en explicitant v :

$$L(O) = \sqrt{\frac{m_e.R.e^2}{4.\pi.\varepsilon_0}} = n.\left(\frac{h}{2.\pi}\right)$$

On vérifie que :

$$\boxed{R = n^2.a_0 \quad \text{avec} \ \ a_0 = \frac{\varepsilon_0.h^2}{\pi.e^2.m_e}}$$

A.N. : $a_0 = 5{,}31.10^{-11}$ m

6) Par définition : 1 eV $= 1{,}60.10^{-19}$ J. Ceci correspond à l'énergie associée à une charge élémentaire, sous une tension d'un volt.

7) Explicitons l'énergie mécanique de l'électron dans le référentiel de l'atome :

$$E_m = E_C + E_P$$

En explicitant :

$$E_m = \frac{1}{2}m_e.v^2 + E_P$$

Déterminons l'énergie potentielle E_P. Pour cela, posons :

$$\delta w = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = -dE_P(r)$$

Sachant que la trajectoire de l'électron est plane, en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{dl} = dr.\vec{u}_r + r.d\theta.\vec{u}_\theta$$

Ainsi :

$$\delta w = \frac{-e^2.dr}{4.\pi.\varepsilon_0.r^2} = -dE_P(r)$$

$$\frac{dE_P(r)}{dr} = \frac{e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.r^2}$$

En primitivant, on établit que :

$$E_P(r) = -\frac{e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.r} + A$$

où A est une constante additive. Si on pose que $E_P(r) = 0$ quand $r \to \infty$ alors :

$$\boxed{E_P(r) = -\frac{e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.r}}$$

Sachant que :

$$v^2 = \frac{e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.m_e.r}$$

On établit l'expression de l'énergie mécanique en fonction du rayon $r = R$:

$$E_m = \frac{e^2}{8.\pi.\varepsilon_0.R} - \frac{e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.R} = -\frac{e^2}{8.\pi.\varepsilon_0.R}$$

On vérifie que pour une trajectoire circulaire :

$$E_m = \frac{E_P(r)}{2} = -E_C$$

Posons :

$$R = n^2.a_0 = n^2.\left(\frac{\varepsilon_0.h^2}{\pi.e^2.m_e}\right)$$

$$E_m = -\frac{e^2}{8.\pi.\varepsilon_0.R} = -\frac{m_e.e^4}{8.\varepsilon_0^2.h^2.n^2}$$

On vérif que :

$$E_m = -\frac{E_0}{n^2} \quad \text{avec} \quad E_0 = -\frac{m_e.e^4}{8.\varepsilon_0^2.h^2}$$

A.N. : $E_0 = 2{,}17.10^{-18}$ J $= 13{,}5$ eV

8) Relation de Planck-Einstein : $E = h.\nu = \frac{h.c}{\lambda}$ A.N. : $E = 3{,}32.10^{-19}$ J $= 2{,}07$ eV

9) Posons :

$$E_p - E_n = \frac{h.c}{\lambda_{n,p}}$$

En explicitant :

$$E_p - E_n = E_0.\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{h.c}{\lambda_{n,p}} \quad \text{avec} \quad p > n$$

Soit :

$$\frac{1}{\lambda_{n,p}} = \frac{E_0}{h.c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)$$

10) Rappelons que le domaine du visible correspond à des longueurs d'onde $\lambda(\text{nm}) \in [400 ; 750]$. Posons $n = 2$, il y a 4 niveaux de transitions qui correspondent à des émissions dans le domaine du visible :

- Pour $p = 3$: $\lambda_{2,3} = 660$ nm
- Pour $p = 4$: $\lambda_{2,4} = 489$ nm
- Pour $p = 5$: $\lambda_{2,5} = 436$ nm
- Pour $p = 6$: $\lambda_{2,6} = 412$ nm

11) Si initialement l'atome est dans son état fondamental :

$$E_{ion} = E_f - E_i$$

Avec :

$E_f = 0$: atome ionisé, l'électron est à l'infiniau repos.
$E_i = -E_0$: atome dans son état fondamental

On établit que :

$$E_{ion} = E_0 = 13{,}5 \text{ eV}$$