

Durée de l'épreuve : 4h

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'appréciation **des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Problème n°1 : Etude d'un moteur Diesel

Le moteur des locomotives diesel fut inventé en 1892 par l'ingénieur allemand Rudolf Diesel. Les premières locomotives « Diesel-mécanique » où la puissance est transmise par l'intermédiaire d'une boîte de vitesse à pignons furent rapidement remplacées par des locomotives « Diesel-électrique » où le moteur diesel, en tournant, entraîne un alternateur. Ce dernier fournit de l'énergie à plusieurs moteurs électriques de traction.

On modélise le fonctionnement d'un moteur Diesel en considérant un système fermé, constitué de n moles de gaz parfait diatomiques, décrivant le cycle réversible dont les caractéristiques sont décrites ci-dessous :

- Admission A_0A : la soupape d'arrivée de l'air est ouverte, celles d'arrivée de gasoil et celle d'échappement des gaz sont fermées. La pression est $P_{atm} = 1,00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et la température $T_{atm} = 300 \text{ K}$. Le volume passe de V_{min} à V_{max} de façon isobare.
- Compression AB : les soupapes sont fermées. Le volume de l'air admis passe de V_{max} à V_{min} de manière adiabatique et réversible.
- Injection et combustion BC : les soupapes sont fermées, sauf celle d'injection du gasoil. Une petite quantité de gasoil est injectée et la combustion se produit. Le volume augmente jusqu'à V_C . On modélise cette phase par une évolution isobare.
- Détente CD : les soupapes sont toutes fermées. L'injection cesse en C et le mélange subit une détente adiabatique et réversible jusqu'à atteindre un volume V_{max} .
- Refroidissement DA : la soupape d'échappement est ouverte. La pression diminue brutalement jusqu'à P_{atm} et le volume reste constant.
- Ejection AA_0 : la soupape d'échappement est ouverte, les autres fermées. Le volume passe de V_{max} à V_{min} de façon isobare.

1) Représenter le cycle Diesel $A_0ABCDAA_0$ dans le diagramme de Watt (P, V).

2) On définit le rapport volumétrique de compression $x = V_{max}/V_{min}$ ainsi que le rapport volumétrique de détente $y = V_{max}/V_C$. Exprimer les pressions P_B et P_D en fonction de P_{atm} , x, y et du rapport $\gamma = C_{pm}/C_{vm}$ des capacités thermiques molaires à pression et à volume constant du gaz considéré. Calculer P_B et P_D .

3) Définir le rendement thermodynamique, noté η_D pour ce moteur et l'exprimer en fonction des températures T_A, T_B, T_C, T_D et du rapport γ .

4) Montrer que η_D peut s'exprimer sous la forme :

$$\eta_D = 1 - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{y^{-\gamma} - x^{-\gamma}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}} \right)$$

puis faire l'application numérique en utilisant les données fournies en fin d'énoncé. En réalité, le rendement observé est de l'ordre de 0,45. Commenter.

5) Une locomotive à moteur Diesel roule à la vitesse constante $v = 140 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Le moteur tourne à la vitesse angulaire, elle aussi constante, de $2000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$, un tour correspondant à un cycle du moteur. Déterminer le transfert thermique Q_C sur un cycle puis la consommation du moteur en gasoil pour 100 km. Calculer la puissance mécanique moyenne du moteur de la locomotive (en utilisant la valeur du rendement observé).

Données :

Volume maximal du gaz dans le cycle diesel : $V_{max} = 57 L$

Rapports des volumes dans le cycle diesel : $x = V_{max}/V_{min} = 20$ et $y = V_{max}/V_C = 7,0$

Rapport des capacités thermiques : $\gamma = C_{pm}/C_{vm} = 1,4$

Rappel des expressions des capacités thermiques molaires à volume et à pression constante : $C_{vm} = R/(\gamma - 1)$ et $C_{pm} = \gamma \cdot R/(\gamma - 1)$

Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$

Enthalpie de combustion massique du gasoil : $\Delta h_{GO} = 46,8 MJ \cdot kg^{-1}$

Problème n°2 : Modélisation d'une machine frigorifique

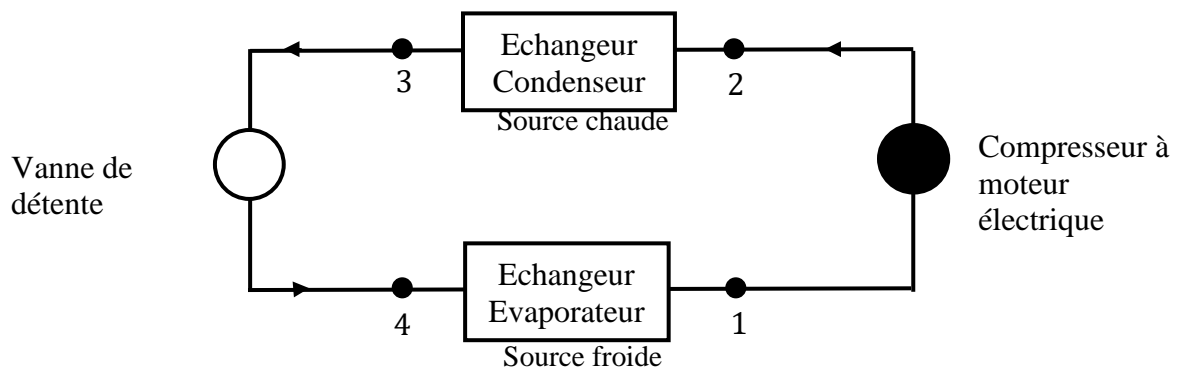
Présentation générale

Un des enjeux majeurs de la grande distribution, de l'industrie et du tertiaire dans les années à venir sera de diviser sa consommation d'énergie de moitié. La production frigorifique d'un magasin représente entre 40 et 60 % de la consommation électrique (selon la superficie). La production de froid doit être efficace malgré toutes les perturbations d'ouverture et de fermeture des portes des congélateurs.

Aujourd'hui, de nouveaux types de machines permettent d'adapter la puissance du compresseur aux besoins de l'installation frigorifique en effectuant un réglage en continu de la vitesse du compresseur. Ce type d'installation permet de gagner jusqu'à 25 % de consommation d'énergie. Ce sujet a pour objectif de comprendre un modèle simple du cycle frigorifique et de pointer les paramètres affectant l'efficacité thermodynamique de la machine. Le contrôle en vitesse du compresseur permet de commander la puissance thermique soutirée à la source froide (nommée "puissance frigorifique").

Modélisation du cycle frigorifique

La machine frigorifique est constituée de quatre organes, représentés ci-dessous :



Le fluide frigorigène circulant entre les différents organes est le 1,1,1,2-Tétrafluoroéthane, noté "R134a" par la suite. Le document fourni en annexe représente en coordonnées $(h, \ln P)$ les transformations subies par ce fluide au cours d'un cycle (avec h enthalpie massique du fluide) :

- 1 → 2 : compression isentropique du fluide par le compresseur
- 2 → 3 : échange thermique isobare à haute pression P_{hp} dans le condenseur
- 3 → 4 : détente adiabatique dans le détendeur
- 4 → 1 : échange thermique isobare à basse pression P_{bp} dans l'évaporateur

En plus du cycle, d'autres courbes apparaissent sur le diagramme :

- la courbe de saturation liquide-vapeur (courbe noire en forme de cloche)
- un réseau d'isothermes (courbes en trait plein, tracées à $T = C^{te}$) où les températures sont exprimées en degrés Celsius.
- un réseau d'isentropiques (courbes en pointillés, tracées à entropie massique $s = C^{te}$)
- un réseau d'iso-titres en vapeur à l'intérieur de la courbe de saturation (courbes en pointillés tracées à l'intérieur de la courbe de saturation, à titre en vapeur $x = C^{te}$)

A l'intérieur de la courbe de saturation, le fluide est diphasé liquide-vapeur. A gauche de la courbe de saturation, le fluide est liquide. A droite, le fluide est gazeux. Seul le début des courbes isothermes est représenté dans les diagrammes situés à gauche et à l'intérieur de la courbe de saturation. Cela permet d'alléger le diagramme, les isothermes étant horizontales à l'intérieur de la courbe de saturation et verticales à sa gauche.

Données concernant le fluide R134a :

- Masse volumique aux différents points du cycle (en $kg.m^{-3}$) :
 $\mu_1 = 4,2$ $\mu_2 = 45,5$ $\mu_3 = 1,3.10^3$ $\mu_4 = 12,5$
- Ordre de grandeur des capacités thermiques massiques : $c_V \sim c_P \sim c \sim 1 kJ.kg^{-1}.K^{-1}$ (ordres de grandeur valables pour la phase liquide et pour la phase vapeur).

On rappelle l'expression du premier principe de la thermodynamique en écoulement stationnaire appliqué à un système ouvert :

$$\Delta \left(h + \frac{1}{2} v^2 + g.z \right) = w_u + q$$

avec :

- $\Delta h = h_{sortie} - h_{entrée}$: variation d'enthalpie massique entre l'entrée et la sortie
- $\Delta \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$: variation d'énergie cinétique massique du fluide entre l'entrée et la sortie
- $\Delta(g.z)$: variation d'énergie potentielle massique de pesanteur entre l'entrée et la sortie
- w_u travail massique utile, apporté au fluide par toute pièce mobile en contact avec lui
- q transfert thermique massique reçu par le fluide

Notations : les grandeurs associées à l'état 1 du cycle sont indicées "1". Les quantités échangées entre le fluide et l'extérieur au cours de la transformation $1 \rightarrow 2$ sont indicées par "12".

I : Questions préalables sur le principe de fonctionnement d'une machine frigorifique

Le principe d'une machine frigorifique ditherme est le suivant : " un fluide frigorigène circule entre les différents organes de la machine. Mis en mouvement par le compresseur, ce fluide effectue des échanges énergétiques avec les deux sources."

I.1 : Rappeler le schéma de fonctionnement d'une machine frigorifique ditherme. Donner et justifier les signes des quantités suivantes : w_{12} ; q_{23} et q_{41} .

I.2: Si l'on considère le réfrigérateur que l'on possède à la maison, où se situe la source froide ? Et la source chaude ?

II: Questions préalables sur l'expression utile du premier principe

II.1: On note D_m le débit massique défini par : $D_m = \frac{\delta m}{dt}$ avec δm masse traversant une section S de canalisation pendant un intervalle de temps dt . En supposant le champ de pression et le champ de vitesse uniformes sur cette section, exprimer le débit massique à un endroit quelconque de la canalisation, en fonction de sa masse volumique μ , de la section S et de la vitesse du fluide v à cet endroit.

II.2: D'après les données, on remarque que la masse volumique du fluide est minimale avant compression (état 1). En admettant que la section des canalisations est approximativement uniforme au cours du cycle, en déduire qu'en régime permanent la vitesse du fluide est maximale avant compression (état 1).

II.3: La vitesse maximale au cours du cycle est de l'ordre de $1 m.s^{-1}$. En prenant comme référence la variation d'enthalpie massique au cours de la compression, en déduire que les variations d'énergie cinétique peuvent être négligées dans l'expression du premier principe de la thermodynamique.

II.4: De la même façon, justifier que le terme $(g.z)$ peut aussi être retiré de l'expression du premier principe de la thermodynamique. On utilisera par la suite l'expression simplifiée suivante du premier principe en écoulement stationnaire :

$$\Delta(h) = w_u + q$$

III: Lecture du diagramme et intérêt de la vaporisation

Pour ne pas dégrader le compresseur, il est crucial que le fluide frigorigène soit purement gazeux à l'entrée de cet organe, toute goutte de liquide entraînant son usure prématurée. C'est pourquoi le fluide à la sortie de l'évaporateur est "surchauffé", sa température T_1 dans l'état 1 est supérieure à celle de la vapeur saturante $T_{sat}(P_{bp})$. La surchauffe est une marge de sécurité qui permet de garantir que le fluide sera bien gazeux à l'entrée du compresseur, même si le fonctionnement de la machine est perturbé.

III.1: Déterminer graphiquement la valeur numérique de la *surchauffe* : $T_1 - T_{sat}(P_{bp})$.

III.2: Le fluide à la sortie du condenseur (état 3) est dit "sous-refroidi", sa température de sortie T_3 est plus basse que la température de vapeur saturante $T_{sat}(P_{hp})$. Déterminer graphiquement la valeur numérique du *sous-refroidissement* : $T_3 - T_{sat}(P_{hp})$.

III.3: La transformation 3 → 4 est une détente de Joule-Thomson. Le détendeur peut-être assimilé à un simple étranglement local de la conduite. Il n'y a pas de pièce mobile et les parois sont calorifugées. Justifier que cette étape est isenthalpique.

III.4: Dans la zone située à gauche de la courbe de saturation, les isothermes sont verticales. Justifier.

III.5: La suite de la détente provoque une vaporisation de R134a. Etablir qu'au cours de cette vaporisation, la variation d'enthalpie massique peut s'écrire :

$$\Delta h = c \cdot (T_4 - T_3) + l_{vap}(T_4) \cdot x_{vap}$$

avec $l_{vap}(T_4) = h_{vap}(T_4) - h_{liq}(T_4)$: enthalpie massique de vaporisation à la température T_4 et x_{vap} le titre en vapeur dans l'état 4. On justifiera clairement la démarche utilisée.

III.6: Mesurer graphiquement $l_{vap}(T_4)$ ainsi que le titre en vapeur dans l'état 4. En déduire un ordre de grandeur numérique de la variation de température ($T_4 - T_3$) attendue lors de la transformation 3 → 4. Cette valeur est-elle du même ordre de grandeur que celle lue sur le diagramme ?

IV: Efficacité de la machine frigorifique

IV.1: Quel phénomène faut-il négliger pour modéliser les échanges thermiques considérés comme étant isobares ?

IV.2: Quelles hypothèses faut-il faire pour modéliser la compression comme étant isentropique ?

On rappelle la définition de l'efficacité d'une machine thermique :

$$e = \left| \frac{\text{énergie massique utile}}{\text{énergie massique coûteuse}} \right|$$

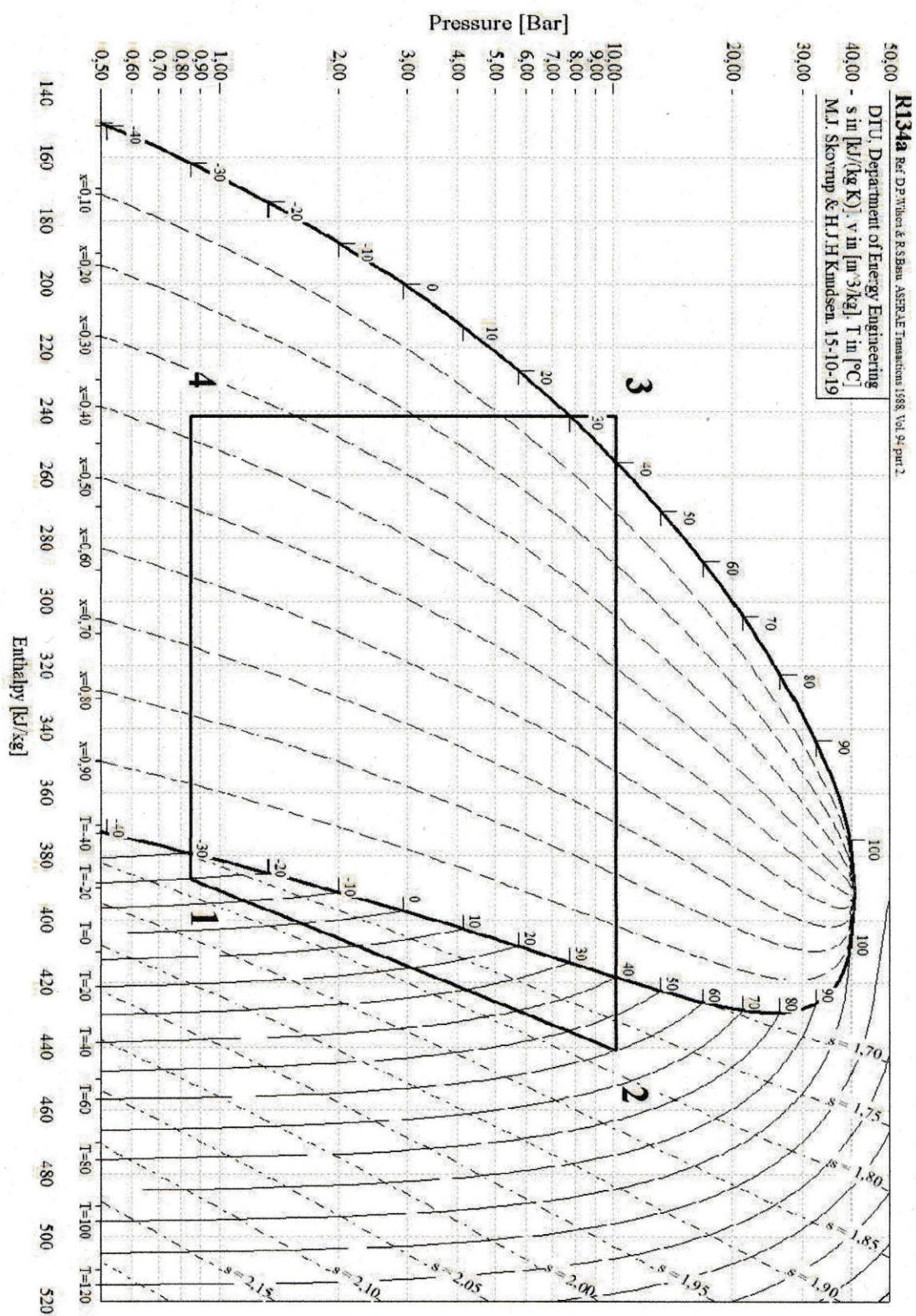
IV.3: A quoi correspondent ces deux termes énergétiques dans le cas de la machine frigorifique et identifier dans le cycle la transformation associée à chacun. Déterminer leur valeur numérique par lecture graphique sur le diagramme ($h, \ln P$). En déduire la valeur de l'efficacité.

IV.4: En appliquant à 1,0 kg de fluide frigorigène les deux principes de la thermodynamique sur un cycle réversible, établir l'expression de l'efficacité de Carnot en fonction des températures de la source froide T_f et de la source chaude T_c . Faire l'application numérique avec $T_c = 40^\circ\text{C}$ et $T_f = -30^\circ\text{C}$ et comparer cette valeur à l'efficacité calculée dans le cadre du modèle étudié. Le résultat de cette comparaison était-il prévisible ? Quelles sont les sources d'irréversibilité du cycle avec lequel a été modélisé la machine frigorifique ?

IV.5: Aucune transformation réelle n'est réversible. La compression qui amène le fluide de P_{bp} à P_{hp} est nécessairement irréversible, contrairement à l'hypothèse simplificatrice de notre modèle. Proposer une modification simple de l'allure de la courbe 1 → 2 du diagramme ($h, \ln P$) pour tenir compte de l'irréversibilité. En déduire graphiquement une conséquence sur l'efficacité.

IV.6: Expliquer en quoi le sous-refroidissement permet d'augmenter l'efficacité de la machine, tous les autres paramètres étant gardés identiques.

Document annexe :



- Cycle subi par le fluide R134a, en coordonnées Pression - Enthalpie massique (tracé avec le logiciel CoolPack)

Problème n°3 : L'atome classique : réussites et difficultés

Ce problème aborde quelques aspects historiques de la description de la structure de la matière telle qu'elle a été élaborée au XX^{ème} siècle. Nous étudierons le modèle classique de l'atome et l'analyse de quelques étapes de sa construction, ainsi qu'une de ses faiblesses principales.

I. Le modèle « plum pudding » de J.J. Thomson

Dans la foulée de sa « découverte » de l'électron, J.J. Thomson proposa en 1904 un modèle d'atome appelé communément modèle de *plum-pudding*. Dans ce modèle, l'atome est assimilé à une sphère de rayon a_0 contenant les électrons, particules ponctuelles de charge $-q_e$ et de masse m . Ceux-ci se déplacent au sein d'une répartition volumique de charge positive supposée uniforme dans tout le volume de l'atome et dont la présence assure l'électroneutralité de l'atome.

Dans la suite nous nous limiterons à un modèle d'atome d'hydrogène pour simplifier.

Dans le modèle de J.J. Thomson, nous supposons que l'électron est soumis au champ électrique $\vec{E}(M)$ exercé par le noyau à l'intérieur de l'atome donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{q_e}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a_0^3} \vec{r}$$

où $\vec{r} = r \cdot \vec{u}_r$ est le vecteur radial et \vec{u}_r le vecteur radial unitaire.

On cherche à décrire le mouvement d'un électron par rapport à un référentiel relativement auquel la distribution de charge étudiée est au repos. On supposera ce référentiel galiléen.

A un instant pris comme origine, l'électron est placé dans l'atome à une distance $r_0 < a_0$ avec une vitesse \vec{v}_0 telle qu'il reste toujours à l'intérieur de l'atome. On prend comme valeur numérique pour le rayon $a_0 = 1,0 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

- 1) Faites un schéma de l'atome d'hydrogène dans le modèle de J.J. Thomson.
- 2) Justifier que le poids de l'électron est négligeable par rapport à la force électrique qu'il subit.
- 3) Montrer que le mouvement est plan.
- 4) En prenant un repère cartésien Oxy de ce plan dont l'origine coïncide avec le centre de l'atome, montrer que les coordonnées de l'électron obéissent au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0 \end{cases}$$

où ω_0 est une pulsation que l'on exprimera en fonction de la charge élémentaire q_e , de la masse de l'électron m , du rayon atomique a_0 et de la constante diélectrique du vide ϵ_0 .

5) Si l'on suppose la vitesse initiale dirigée perpendiculairement au rayon vecteur, caractériser la trajectoire de l'électron dans l'atome.

6) Exprimer l'énergie mécanique de l'électron et montrer que si le module de la vitesse initiale v_0 est inférieure à la valeur $\omega_0 \cdot \sqrt{a_0^2 - r_0^2}$ alors l'électron reste bien dans l'atome tout au long de sa trajectoire.

7) On montre en électromagnétisme classique (c'est-à-dire à partir des équations de Maxwell) qu'une charge animée d'un mouvement périodique de fréquence f rayonne une onde électromagnétique de même fréquence. Calculer la fréquence de l'onde électromagnétique associée, en déduire la longueur d'onde correspondante. A quel domaine spectral cela correspond-il ?

II. Découverte du noyau (Rutherford)

Après avoir identifié que le rayonnement α issu des diverses sources radioactives était en fait constitué d'atomes d'hélium de charge $2 \cdot q_e$ privés de leurs électrons, le physicien E. Rutherford eut l'idée d'exploiter ce rayonnement pour sonder la matière et ainsi tester le modèle de J.J. Thomson étudié à la section précédente.

II.A Déviation par une feuille de mica

Rutherford observa tout d'abord qu'un faisceau de particules α monocinétiques traversant une feuille de mica d'épaisseur $L = 0,003 \text{ cm}$ était dévié d'un angle maximal θ_d d'environ 2° . Il en déduit qu'il

devait exister au sein de la matière un champ électrique transverse E_{\perp} d'environ 100 millions de volts par centimètre. L'énergie cinétique des particules α avait pour valeur $E_C = 5 \text{ MeV}$ où $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

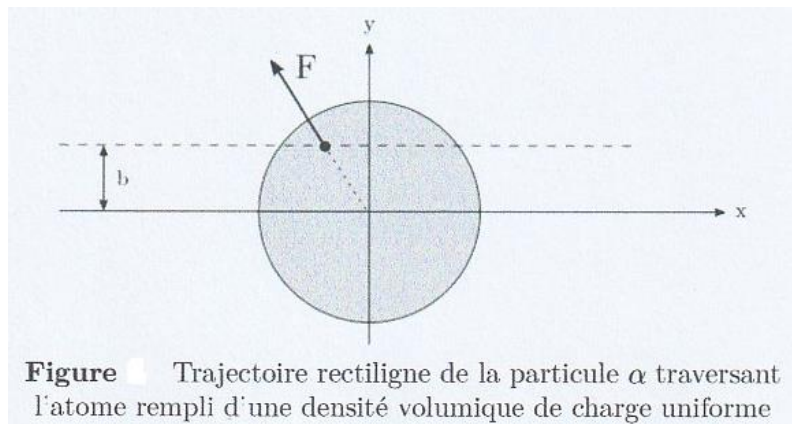
8) Justifier quantitativement l'ordre de grandeur du champ électrique transverse déduit par Rutherford à partir des résultats expérimentaux. On détaillera les notations utilisées en s'aidant d'un schéma.

II.B Déviation des particules α dans le modèle de Thomson

On peut tester plus précisément le modèle de Thomson étudié plus haut (où la charge positive est supposée diluée dans l'atome) en envoyant un faisceau de particules α sur une feuille d'or. L'expérience, réalisée par H. Geiger, consiste tout d'abord à vérifier que le faisceau dans le vide et en l'absence de cible vient frapper en ligne droite un scintillateur, puis qu'en interposant la feuille d'or le faisceau s'élargit à cause des interactions des particules α avec la distribution de charges positives dans les atomes.

II.B.1) Déviation par une collision unique

Les atomes étant globalement neutres, on peut considérer qu'il n'y a interaction entre la particule α de charge $q = 2 \cdot q_e$ et la charge positive $Q = +Z \cdot q_e$ (où $Z = 79$ pour l'or) que lorsque la particule rentre dans l'atome proprement dit. La déviation étant très faible, comme nous allons le vérifier plus loin, on peut calculer l'effet de l'interaction entre la particule α supposée ponctuelle et la distribution de charge positive en considérant que sa trajectoire est rectiligne (cf figure ci-dessous). On note \vec{v}_0 la vitesse de la particule α .



9) En utilisant le champ électrique donné en début de problème, que devient le champ électrique dans un atome d'or ? Montrer que la force suivant la direction transverse (axe Oy) vaut :

$$F_y = \frac{2 \cdot Z \cdot e^2 \cdot b}{a_0^3} \text{ où } e^2 = \frac{q_e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}$$

b est la distance de la trajectoire avec la droite parallèle passant par le centre diffuseur (paramètre d'impact).

10) Montrer alors que la variation maximale de la quantité de mouvement de la particule α dans la direction transverse vaut :

$$\Delta p_m = \frac{2 \cdot Z \cdot e^2}{a_0 \cdot v_0}$$

11) En déduire que la déviation angulaire $\delta\theta$ est :

$$\delta\theta = \frac{Z \cdot e^2}{a_0 \cdot E_C}$$

où E_C est l'énergie cinétique de la particule α . Effectuer l'application numérique. On prendra $a_0 = 1,0 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ et $E_C = 5 \text{ MeV}$.

II.B.2) Collisions multiples

12) La cible constituée d'une feuille d'or d'épaisseur $L = 1 \mu\text{m}$ contient N atomes sur la trajectoire de la particule α . Celle-ci effectue donc N collisions dont en moyenne la moitié vont donner une déviation positive $+\delta\theta$ et l'autre moitié une déviation négative $-\delta\theta$. On peut alors montrer que la déviation totale est une variable aléatoire dont l'écart type s'écrit $\Delta\theta = \delta\theta \cdot \sqrt{N}$. Calculer l'ordre de grandeur de cette déviation et conclure quant à la possibilité d'avoir des déviations angulaires importantes (plusieurs degrés).

II.C Rétrodiffusion des particules α dans le modèle de Rutherford

L'expérience de Geiger montre qu'on observe des angles de déviation importants, pouvant aller jusqu'à la rétrodiffusion (angles voisins de 180°), ce que Rutherford interprète comme l'existence d'une zone de très petite taille contenant la totalité de la charge positive et appelée depuis noyau de l'atome. On considère dans le modèle de Rutherford que la particule α ne pénètre jamais dans la distribution de charge positive.

13) On considère le cas extrême d'une collision frontale et on supposera pour simplifier que l'atome est immobile compte tenu de sa masse importante par rapport aux particules α . Montrer en utilisant la conservation de l'énergie mécanique que le noyau possède un rayon maximal r_0 vérifiant :

$$r_0 = \frac{2 \cdot Z \cdot e^2}{E_C}$$

où E_C est l'énergie cinétique initiale des particules α .

14) Application numérique : on obtient une rétrodiffusion élastique jusqu'à des énergies incidentes $E_C = 40 \text{ MeV}$ des particules α . Déterminer alors les dimensions du noyau. Commenter.

III. Instabilité d'un modèle d'atome « classique »

Le modèle d'atome de Rutherford avec une charge positive concentrée dans une région très petite de l'espace ayant été établi par les expériences de Geiger, on se propose dans cette partie d'étudier l'instabilité d'un atome dont les électrons seraient en orbite autour du noyau de façon analogue au mouvement des planètes autour du Soleil. On se limitera ici au cas d'un atome d'hydrogène avec une charge positive $+q_e$ et un électron de charge $-q_e$ en orbite circulaire. On montre que la puissance rayonnée à grande distance par une particule chargée a pour expression :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{6 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^3} a^2$$

où a est le module du vecteur accélération.

15) Dans le modèle d'atome d'hydrogène « planétaire » où l'électron a un mouvement circulaire uniforme autour du noyau, montrer que l'énergie mécanique s'écrit :

$$E = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{R}$$

où R désigne la distance électron-noyau, et où on a posé comme précédemment que :

$$e^2 = \frac{q_e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}$$

16) On tient compte à présent de la puissance électromagnétique rayonnée par l'électron. Par conservation de l'énergie totale du système, l'émission d'une énergie de rayonnement doit s'accompagner d'une diminution de l'énergie de l'électron. En supposant la trajectoire quasi-circulaire de rayon R , montrer que la puissance rayonnée par l'électron s'écrit :

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3} \frac{e^6}{m^2 \cdot c^3} \frac{1}{R^4}$$

17) En déduire que le rayon moyen R obéit à l'équation différentielle :

$$R^2 \cdot \frac{dR}{dt} = -\frac{4}{3} \frac{e^4}{m^2 \cdot c^3}$$

18) Estimer alors le temps de vie τ de cet atome.

19) Effectuer l'application numérique en prenant pour rayon initial $a_0 = 1,0 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Commentaires ?

Données :

Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Champ de gravitation à la surface de la Terre : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Charge élémentaire : $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Masse de l'électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

Electron-volt : $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

On notera $e^2 = q_e^2 / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0$ dont la valeur numérique vaut $e^2 = 2,3 \cdot 10^{-28} \text{ J} \cdot \text{m}$ en unité du système international ou en unité atomiques $e^2 = 1,4 \text{ eV} \cdot \text{nm}$.