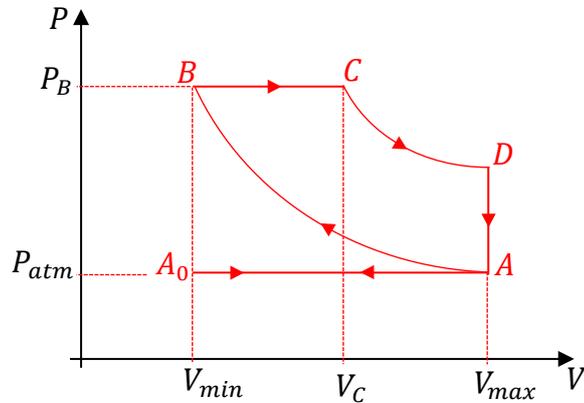


### Problème n°1 : Etude d'un moteur Diesel

1) Allure du cycle Diesel dans un diagramme de Watt :



On vérifie que le cycle est décrit dans le sens horaire donc  $W < 0$  : **cycle moteur**

2) Les évolutions  $AB$  et  $CD$  sont isentropiques. Si on assimile le gaz à un gaz parfait, il vérifie la relation de Laplace  $P \cdot V^\gamma = \text{cte}$ . On établit que :

$$P_A \cdot V_A^\gamma = P_B \cdot V_B^\gamma$$

$$P_B = P_A \cdot \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^\gamma = P_{atm} \cdot \left(\frac{V_{max}}{V_{min}}\right)^\gamma$$

Sachant que  $x = V_{max}/V_{min}$  :

$$P_B = P_{atm} \cdot x^\gamma$$

De la même manière on peut poser que :

$$P_D = P_C \cdot \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^\gamma = P_B \cdot \left(\frac{V_C}{V_{max}}\right)^\gamma = P_B \cdot y^{-\gamma}$$

Sachant que  $P_B = P_{atm} \cdot x^\gamma$  :

$$P_D = P_{atm} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^\gamma$$

A.N. :  $P_B = 66,3 \cdot 10^5$  Pa et  $P_D = 4,35 \cdot 10^5$  Pa.

3) On note  $\eta_D$  le rendement du moteur défini par :

$$\eta_D = \left| \frac{\text{énergie utile}}{\text{énergie dépensée}} \right|$$

Dans un moteur :  $W < 0$ ,  $Q_C > 0$  et  $Q_F < 0$ . La « vocation » d'un moteur est de fournir un travail donc :

$$\eta_D = \left| \frac{W}{Q_C} \right| = -\frac{W}{Q_C}$$

Appliquons le premier principe sur un cycle :  $W + Q_F + Q_C = 0$  donc  $W = -Q_F - Q_C$  :

$$\eta_D = \frac{Q_C + Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C}$$

Le transfert thermique  $Q_C$  s'effectue sur l'isobare  $BC$ , on peut donc poser que :

$$Q_C = \Delta H_{B \rightarrow C} = n \cdot C_{pm} \cdot (T_C - T_B)$$

Le transfert thermique  $Q_F$  s'effectue sur l'isochore  $DA$  donc :

$$Q_F = \Delta U_{D \rightarrow A} = n \cdot C_{vm} \cdot (T_A - T_D)$$

On en déduit que :

$$\eta_D = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{C_{vm}}{C_{pm}} \left( \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} \right)$$

$$\eta_D = 1 - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} \right)$$

4) Afin d'établir l'expression attendue rappelons la relation de Laplace relative au couple  $(T, V)$  pour une évolution isentropique :

$$T \cdot V^{\gamma-1} = \text{cte}$$

On peut donc poser que  $T_D \cdot V_D^{\gamma-1} = T_C \cdot V_C^{\gamma-1}$  ainsi :

$$T_D = T_C \cdot \left( \frac{V_C}{V_D} \right)^{\gamma-1} = T_C \cdot \left( \frac{V_C}{V_{max}} \right)^{\gamma-1} = T_C \cdot y^{1-\gamma}$$

De la même manière posons que :

$$T_A = T_B \cdot \left( \frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = T_B \cdot \left( \frac{V_{min}}{V_{max}} \right)^{\gamma-1} = T_B \cdot x^{1-\gamma}$$

En explicitant :

$$\eta_D = 1 - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{T_C \cdot y^{1-\gamma} - T_B \cdot x^{1-\gamma}}{T_C - T_B} \right)$$

En divisant par  $T_B$  et en notant que :

$$\frac{T_C}{T_B} = \frac{P_C \cdot V_C}{P_B \cdot V_B} = \frac{V_C}{V_B} = \frac{V_C}{V_{min}} = \frac{V_C}{V_{max}} \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{x}{y}$$

On établit que :

$$\eta_D = 1 - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\left( \frac{x}{y} \right) \cdot y^{1-\gamma} - x^{1-\gamma}}{\left( \frac{x}{y} \right) - 1} \right)$$

En divisant par  $x$  on vérifie que :

$$\eta_D = 1 - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{y^{-\gamma} - x^{-\gamma}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}} \right)$$

A.N. :  $\eta_D = 0,61$ . Le rendement observé est inférieur au rendement théorique. On peut supposer que ceci est en partie dû à :

- la viscosité du fluide qui induit un cycle parasite anti-horaire (sur les phases d'admission et d'échappement du fluide). Ce cycle vient se soustraire au cycle moteur.
- le facteur  $\gamma$  du mélange n'est pas celui d'un gaz parfait diatomique (le facteur  $\gamma$  expérimental est inférieur à 1,4).
- la compression  $AB$  et la détente  $CD$  ne sont pas réversibles (et donc isentropiques). Il y a création d'entropie ce qui limite le rendement du moteur.

5) Déterminons le transfert thermique  $Q_C$  :

$$Q_C = n \cdot C_{pm} \cdot (T_C - T_B)$$

Avec :

$$C_{pm} = \frac{\gamma \cdot R}{\gamma - 1}; \quad T_B = T_A \cdot x^{\gamma-1}; \quad T_A = T_{atm} \quad \text{et} \quad \frac{T_C}{T_B} = \frac{x}{y}$$

En explicitant :

$$Q_C = \frac{\gamma \cdot n \cdot R \cdot T_{atm} \cdot x^{\gamma-1}}{\gamma - 1} \left( \frac{x}{y} - 1 \right)$$

En appliquant l'équation d'état des gaz parfaits :  $n \cdot R \cdot T_{atm} = P_{atm} \cdot V_{max}$  :

$$Q_C = \frac{\gamma \cdot P_{atm} \cdot V_{max} \cdot x^{\gamma-1}}{\gamma - 1} \left( \frac{x}{y} - 1 \right)$$

A.N. :  $Q_C = 123 \text{ kJ}$

Connaissant l'enthalpie de combustion massique du gasoil, on peut déterminer la masse de gasoil consommée par cycle :

$$m_{GO}(1) = \frac{Q_C}{\Delta h_{GO}} = \frac{\gamma \cdot P_{atm} \cdot V_{max} \cdot x^{\gamma-1}}{(\gamma - 1) \cdot \Delta h_{GO}} \left( \frac{x}{y} - 1 \right)$$

A.N. :  $m_{GO}(1) = 2,62 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{cycl}^{-1}$

Pour effectuer la distance  $d = 100 \text{ km}$  à la vitesse  $v = 140 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  il faut un temps  $t = d/v = 42,9 \text{ min}$  ce qui correspond à  $N$  cycles. Posons  $\omega = 2000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$  :

$$N = \frac{\omega \cdot d}{v}$$

On détermine la masse de gasoil consommée pour une distance de 100 km :

$$m_{GO}(100) = \frac{m_{GO}(1) \cdot \omega \cdot d}{v}$$

En explicitant en fonction des données :

$$m_{GO}(100) = \frac{\gamma \cdot P_{atm} \cdot V_{max} \cdot x^{\gamma-1} \cdot \omega \cdot d}{(\gamma - 1) \cdot \Delta h_{GO} \cdot v} \left( \frac{x}{y} - 1 \right)$$

A.N. :  $m_{GO}(100) = 225 \text{ kg}$

Connaissant le rendement du moteur Diesel :

$$W = -\eta_D \cdot Q_C \quad (\text{avec } \eta_D = 0,45)$$

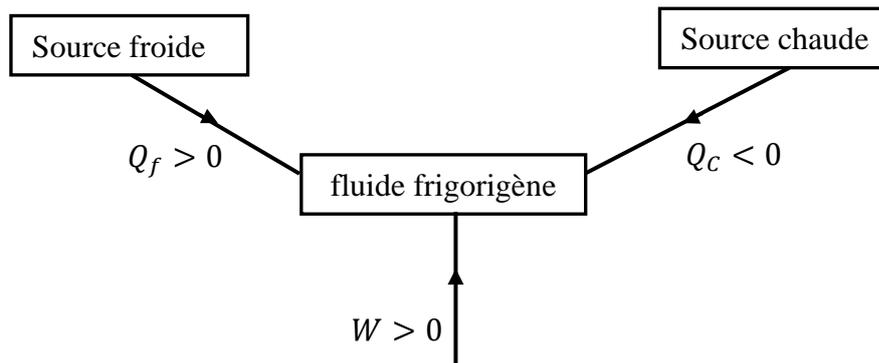
La puissance mécanique moyenne de la locomotive est donnée par :

$$\mathcal{P}_m = -\eta_D \cdot Q_C \cdot \omega$$

A.N. :  $\mathcal{P}_m = 1,85 \cdot 10^3 \text{ kW}$

## Problème n°2 : Modélisation d'une machine frigorifique

I.1 : Schéma de fonctionnement d'une machine frigorifique ditherme (en adoptant une convention récepteur pour le fluide) :



A partir des données, en grandeurs massiques, par identification on peut dire que :

$$\begin{aligned} q_f &= q_{41} > 0 \\ q_c &= q_{23} < 0 \\ w &= w_{12} > 0 \end{aligned}$$

I.2 : La source chaude est le milieu extérieur au réfrigérateur. Le contact thermique entre le fluide et la source chaude s'effectue au niveau du serpentin situé à l'arrière du réfrigérateur. La source froide est constituée par « tout ce qu'il y a dans le réfrigérateur » (aliments et air). Le contact thermique avec la source froide s'effectue au niveau du serpentin intérieur ("freezer").

II.1 : Par analyse dimensionnelle, on peut dire que :

$$D_m = \frac{\delta m}{dt} = \mu \cdot S \cdot v$$

II.2 : En régime permanent, le débit massique est constant. Sachant que la section  $S$  est constante :  $\mu \cdot v = C^{te}$ . La masse volumique est minimale avant la compression (état 1) donc la vitesse du fluide est maximale dans l'état 1 :  $v_{max} = v_1$ .

II.3 : Sachant que  $\mu_1 \cdot v_1 = \mu_2 \cdot v_2$  :  $v_2 = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right) \cdot v_1$ . La variation d'énergie cinétique massique au cours de la compression est :

$$(\Delta e_c)_{12} = \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2 - 1 \right) \cdot v_1^2$$

A.N. :  $(\Delta e_c)_{12} = -0,5 J \cdot kg^{-1}$  : on vérifie que  $(\Delta e_c)_{12} \ll \Delta h_{12} \sim 50 kJ \cdot kg^{-1}$  (cf doc annexe).

II.4 : Les dimensions caractéristiques d'un réfrigérateur sont de l'ordre du mètre donc  $\Delta(g, z) \sim 10 J \cdot kg^{-1}$ . De la même manière, on peut faire l'hypothèse que :  $\Delta(g, z) \ll \Delta h$ . Dans la suite, nous appliquerons donc le premier principe pour les fluides en écoulement permanent sous la forme :

$$\Delta(h) = w_u + q$$

III.1 : Valeur numérique de la surchauffe :  $T_1 - T_{sat}(P_{bp}) = -20 - (-30) = 10 \text{ } ^\circ C$

III.2 : Valeur numérique du sous-refroidissement :  $T_3 - T_{sat}(P_{hp}) = 30 - (40) = -10 \text{ } ^\circ C$

III.3 : En appliquant le premier principe pour un fluide en écoulement permanent entre 3  $\rightarrow$  4, sachant que l'évolution est adiabatique (parois calorifugées) et que le travail utile est nul (pas de pièces mobiles) on vérifie que la détente de Joule-Thomson est isenthalpique :  $\Delta h_{34} = 0$ .

III.4 : A gauche de la courbe de saturation, le fluide frigorigène est à l'état liquide donc sa variation d'enthalpie massique est donnée par :  $\Delta h = c \cdot \Delta T$ . On en déduit que les isothermes sont confondues avec les isenthalpiques (verticales).

III.5 : L'enthalpie est une fonction d'état, donc sa variation ne dépend pas du chemin suivi pour aller de l'état 3' à l'état 4 (cf figure ci-contre) mais uniquement de l'état initial et de l'état final. Avec  $\Delta h_{3'4} = \Delta h$  on peut donc poser que :

$$\Delta h = \Delta h_{3'0} + \Delta h_{04}$$

De l'état 3' à l'état 0 : le fluide est à l'état liquide donc :

$$\Delta h_{3'0} = c \cdot (T_0 - T_{3'}) = c \cdot (T_4 - T_3)$$

avec  $T_0 = T_4$  et  $T_{3'} = T_3$

De l'état 0 à l'état 4 : le fluide subit une vaporisation partielle à température constante donc :

$$\Delta h_{04} = (x_4 - x_0) \cdot l_{vap}(T_4)$$

Avec  $x_4 = x_{vap}$  et  $x_0 = 0$  on établit que :  $\Delta h_{04} = x_{vap} \cdot l_{vap}(T_4)$

On vérifie que :  $\Delta h = c \cdot (T_4 - T_3) + x_{vap} \cdot l_{vap}(T_4)$

III.6 : Mesures :  $l_{vap}(T_4) = 380 - 160 = 220 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $x_{vap} = 0,35$ . Sachant que l'évolution est isenthalpique :

$$T_4 - T_3 = - \frac{x_{vap} \cdot l_{vap}(T_4)}{c}$$

A.N.:  $T_4 - T_3 = -76 \text{ }^\circ\text{C}$ . En ordre de grandeur, nous retiendrons que la baisse de température est de l'ordre de quelques dizaines de degrés ce qui est en accord avec le diagramme sur lequel  $T_4 - T_3 = -60 \text{ }^\circ\text{C}$ .

IV.1: Une évolution est isobare si la pression dans le fluide est constante et uniforme. Pour cela, il faut négliger la viscosité qui génère des gradients de pression.

IV.2: Pour qu'une évolution soit isentropique, il faut qu'elle soit adiabatique et réversible.

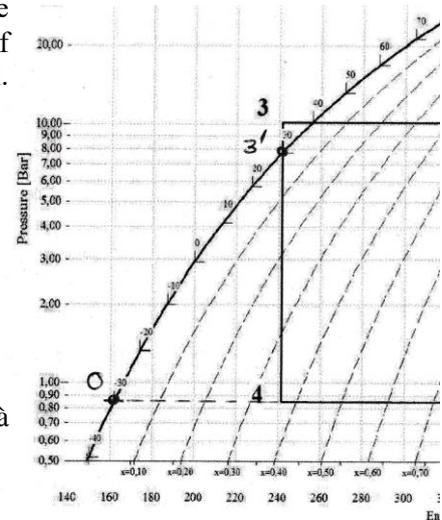
IV.3: Dans une machine frigorifique, l'énergie massique utile est celle qui est échangée avec la source froide, soit ici  $q_{41}$ . L'énergie massique coûteuse est celle que l'on paye, c.à.d. celle qui est utilisée pour alimenter le compresseur (énergie massique électrique), soit le travail utile  $w_u$  fourni de 1  $\rightarrow$  2.

- De 4  $\rightarrow$  1 : appliquons le premier principe pour un fluide en écoulement permanent :

$$\Delta h_{41} = q_{41}$$

Mesures :  $q_{41} = \Delta h_{41} = h_1 - h_4 = 388 - 242 = 146 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . On vérifie que  $q_{41} > 0$  comme annoncé à la question I.1.

- De 1  $\rightarrow$  2 : appliquons le premier principe pour un fluide en écoulement permanent, en notant que l'évolution est isentropique (donc adiabatique  $q_{12} = 0$ ) :  $\Delta h_{12} = w_u$ .  
Mesures :  $w_u = \Delta h_{12} = h_2 - h_1 = 440 - 388 = 52 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . On vérifie que  $w_u > 0$ .
- Efficacité de la machine frigorifique :



$$e = \left| \frac{q_{41}}{w_u} \right| = 2,8$$

IV.4: Soit  $e_c = \left| \frac{Q_f}{W} \right| = \frac{Q_f}{W}$  le coefficient d'efficacité du cycle de Carnot. En appliquant le premier principe sur un cycle, on établit que :  $Q_c + Q_f + W = 0$  donc  $W = -(Q_c + Q_f)$ .

Ainsi :

$$e_c = -\frac{Q_f}{Q_c + Q_f}$$

En appliquant le second principe sur un cycle réversible, on établit que :  $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0$  soit  $\frac{Q_c}{Q_f} = -\frac{T_c}{T_f}$  soit :

$$e_c = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

A.N.:  $e_c = \frac{243}{313-243} = 3,5$  on vérifie que  $e < e_c$  ce qui est en accord avec le théorème de Carnot.

Les phénomènes irréversibles dans le cycle réel limitent son efficacité. Sources d'irréversibilité : gradients de température et de pression, viscosité dans le fluide.

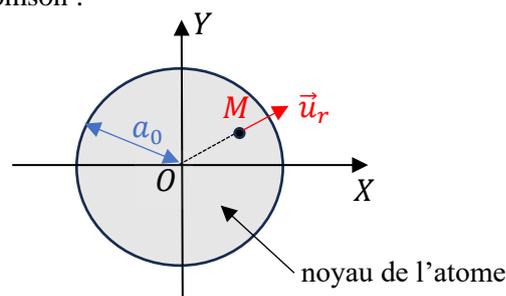
IV.5: Si l'évolution de  $1 \rightarrow 2$  est adiabatique et irréversible, sachant que l'entropie créée est positive  $\Delta s_{12} > 0$ . Dans ces conditions, à pression  $P_{hp}$  égale, le point (2) est déplacé vers la droite ce qui augmente  $\Delta h_{12} = w_u$  et diminue l'efficacité de la machine frigorifique.

IV.6: Le sous-refroidissement a pour effet de déplacer le point (3) (et donc le point (4)) vers la gauche ce qui augmente  $q_{41}$  et donc l'efficacité de la machine.

## Problème n°3 : L'atome classique : réussites et difficultés

### I. Le modèle « plum pudding » de J.J. Thomson

1) Schéma du modèle de J.J. Thomson :



2) En norme, le poids de l'électron est  $p = m \cdot g$  et la force de Lorentz électrique :

$$F = q_e \cdot E = \frac{q_e^2 \cdot r}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a_0^3}$$

En ordre de grandeur :

$$F = \frac{q_e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a_0^2}$$

Rapport des forces :

$$\frac{p}{F} = \frac{m \cdot g \cdot 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a_0^2}{q_e^2} \sim 10^{-22}$$

On vérifie que le poids est négligeable devant la force de Lorentz électrique :  $p \ll F$ .

3) Appliquons le théorème du moment cinétique à l'électron, par rapport au point  $O$ , centre de l'atome :

$$\frac{d\vec{L}(O)}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Avec :  $\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{u}_r$  et  $\vec{F} = F \cdot \vec{u}_r$  :

$$\frac{d\vec{L}(O)}{dt} = \vec{0}$$

On en déduit que le moment cinétique de l'électron est constant :  $\vec{L}(O) = \overrightarrow{ct\vec{e}}$ . Sachant que par définition

$$\vec{L}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v}$$

On peut dire qu'à tout moment le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  est orthogonal au vecteur  $\vec{L}(O)$  donc **la trajectoire de l'électron est plane** et le plan du mouvement passe par le centre de l'atome.

4) Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'électron dans le référentiel de l'atome supposé galiléen :

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} = -q_e \cdot \vec{E}(M) = -\frac{q_e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a_0^3} \vec{r}$$

Projetons dans la base de coordonnées cartésiennes. Sachant que la trajectoire est plane, posons :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y$$

On établit que :

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x} = -\frac{q_e^2 \cdot x}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a_0^3} \\ m \cdot \ddot{y} = -\frac{q_e^2 \cdot y}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a_0^3} \end{cases}$$

On vérifie que :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0 \end{cases}$$

Avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{q_e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot m \cdot a_0^3}}$$

On reconnaît les équations différentielles d'un oscillateur harmonique sur  $\vec{u}_x$  et sur  $\vec{u}_y$ .

5) Les solutions de ces équations différentielles sont du type :

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cdot \cos \omega_0 \cdot t + A_2 \cdot \sin \omega_0 \cdot t \\ y(t) &= B_1 \cdot \cos \omega_0 \cdot t + B_2 \cdot \sin \omega_0 \cdot t \end{aligned}$$

où les constantes  $A_1, A_2, B_1$  et  $B_2$  sont définies par les conditions initiales.

Supposons qu'à  $t = 0$  :  $x(0) = r_0$  et  $y(0) = 0$  alors  $\dot{x}(0) = 0$  et  $\dot{y}(0) = v_0$ . En explicitant on établit que :

$$x(t) = r_0 \cdot \cos \omega_0 \cdot t \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 \cdot t$$

Posons  $a = r_0$  et  $b = v_0/\omega_0$  ; on établit l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad : \text{trajectoire elliptique}$$

6) Energie mécanique de l'électron :

$$E_m = E_c + E_p$$

et déterminons la fonction énergie potentielle  $E_p$  :  $\delta w = \vec{F} \cdot \vec{dl} = -dE_p$ . En explicitant :

$$-\frac{q_e^2 \cdot r \cdot dr}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a_0^3} = -dE_p$$

$$\frac{dE_p}{dr} = \frac{q_e^2 \cdot r}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a_0^3}$$

En primitivant :

$$E_p(r) = \frac{1}{2} \left( \frac{q_e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a_0^3} \right) \cdot r^2 + A$$

Si on pose que  $E_p(r) = 0$  pour  $r = 0$  alors  $A = 0$  :

$$E_p(r) = \frac{1}{2} \left( \frac{q_e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a_0^3} \right) \cdot r^2$$

En reconnaissant :

$$\omega_0^2 = \frac{q_e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot m \cdot a_0^3}$$

On peut poser que :

$$E_p(r) = \frac{1}{2} m \cdot \omega_0^2 \cdot r^2$$

Rq. : la force exercée par le noyau est assimilable à une force de rappel de constante de raideur  $k = m \cdot \omega_0^2$ .

On peut alors exprimer l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} m \cdot \omega_0^2 \cdot r^2$$

Appliquons le théorème de l'énergie mécanique à l'électron :  $dE_m = \delta w^{nc}$ . L'électron est soumis à la force  $\vec{F}$  qui est conservative donc  $dE_m = 0$  : l'énergie mécanique de l'électron est constante :  $E_m = \text{cte}$ . Explicitons cette constante fixée par les conditions initiales :

$$E_m = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 + \frac{1}{2} m \cdot \omega_0^2 \cdot r_0^2$$

A la limite de sortie de l'atome,  $v = 0$  et  $r = a_0$  :

$$E_m = \frac{1}{2} m \cdot \omega_0^2 \cdot a_0^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 + \frac{1}{2} m \cdot \omega_0^2 \cdot r_0^2$$

$$v_0 = \omega_0 \cdot \sqrt{a_0^2 - r_0^2}$$

Pour que l'électron reste dans l'atome, il faut que :

$$v_0 < \omega_0 \cdot \sqrt{a_0^2 - r_0^2}$$

7) Par définition :  $\omega_0 = 2 \cdot \pi f_0$  et  $\lambda_0 = c/f_0$ . En explicitant :

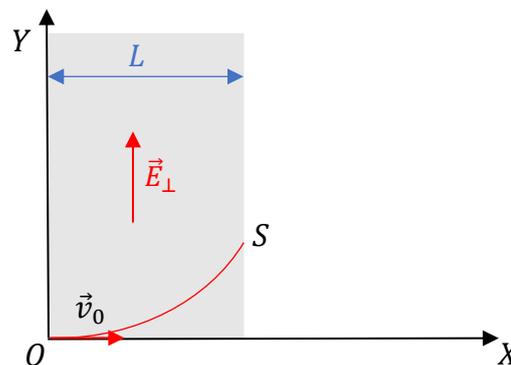
$$f_0 = \sqrt{\frac{q_e^2}{16 \cdot \pi^3 \cdot \epsilon_0 \cdot m \cdot a_0^3}} \quad \text{et} \quad \lambda_0 = \sqrt{\frac{16 \cdot \pi^3 \cdot c^2 \cdot \epsilon_0 \cdot m \cdot a_0^3}{q_e^2}}$$

A.N. :  $f_0 = 2,5 \cdot 10^{15}$  Hz et  $\lambda_0 = 119$  nm : domaine des ondes UV

## II. Découverte du noyau (Rutherford)

### II.A Déviation par une feuille de mica

8) On considère une particule  $\alpha$  qui pénètre avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{u}_x$  dans la zone d'action d'un champ électrique transverse  $\vec{E}_\perp = E_\perp \cdot \vec{u}_y$  :



Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la particule  $\alpha$  en supposant qu'elle soit soumise uniquement à l'action de la force de Lorentz électrique :

$$m \cdot \vec{a} = 2 \cdot q_e \cdot \vec{E}_\perp$$

En projetant dans la base de coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x} = 0 \\ m \cdot \ddot{y} = 2 \cdot q_e \cdot E_\perp \end{cases}$$

En primitivant, on établit que :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ \dot{y} = \frac{2 \cdot q_e \cdot E_\perp \cdot t}{m} \end{cases}$$

Au point S, en posant  $L = v_0 \cdot t_S$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_S = v_0 \\ \dot{y}_S = \frac{2 \cdot q_e \cdot E_\perp \cdot t_S}{m} = \frac{2 \cdot q_e \cdot E_\perp \cdot L}{m \cdot v_0} \end{cases}$$

En notant que :

$$\tan \theta_d = \frac{\dot{y}_S}{\dot{x}_S}$$

En explicitant :

$$\tan \theta_d = \frac{2 \cdot q_e \cdot E_{\perp} \cdot L}{m \cdot v_0^2} = \frac{q_e \cdot E_{\perp} \cdot L}{E_C}$$

Si on exprime  $\theta_d$  en radians, en notant que  $\theta_d \ll 1$ , on peut dire que :

$$E_{\perp} = \frac{E_C \cdot \theta_d}{q_e \cdot L}$$

A.N. :  $E_{\perp} = 58 \cdot 10^6$  V/cm ce qui est en accord avec l'énoncé.

## II.B Déviation des particules $\alpha$ dans le modèle de Thomson

9) Dans un atome d'or, le champ électrique à pour expression :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a_0^3} \vec{r} = \frac{Z \cdot q_e}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a_0^3} \vec{r}$$

La force exercée sur une particule  $\alpha$  est :  $\vec{F} = 2 \cdot q_e \cdot \vec{E}(M)$ . La composante de cette force sur  $\vec{u}_y$  est :

$$F_y = \frac{2 \cdot Z \cdot q_e^2 \cdot y}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a_0^3} = \frac{2 \cdot Z \cdot e^2 \cdot b}{a_0^3}$$

10) Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la particule  $\alpha$ , projeté sur  $\vec{u}_y$  :

$$\frac{dp_y}{dt} = F_y = \frac{2 \cdot Z \cdot e^2 \cdot b}{a_0^3} = \text{cte}$$

Soit :

$$dp_y = \left( \frac{2 \cdot Z \cdot e^2 \cdot b}{a_0^3} \right) \cdot dt$$

$$\Delta p_y = \left( \frac{2 \cdot Z \cdot e^2 \cdot b}{a_0^3} \right) \cdot \Delta t$$

En supposant que la trajectoire est uniforme sur  $\vec{u}_x$  :  $\dot{x} = v_0 = \text{cte}$ . Si on note  $2 \cdot \Delta x$  la distance parcourue dans le noyau d'or sur  $\vec{u}_x$  :

$$2 \cdot \Delta x = v_0 \cdot \Delta t$$

On en déduit que :

$$\Delta p_y = \left( \frac{2 \cdot Z \cdot e^2 \cdot b}{a_0^3} \right) \frac{2 \cdot \Delta x}{v_0}$$

Relation entre  $\Delta x$  et  $b$  :  $a_0^2 = \Delta x^2 + b^2$

$$\Delta p_y = \left( \frac{4 \cdot Z \cdot e^2 \cdot b}{a_0^3} \right) \frac{\sqrt{a_0^2 - b^2}}{v_0}$$

On constate que  $\Delta p_y(b)$ . Déterminons la valeur de  $b$  pour laquelle  $\Delta p_y$  est maximale.  $\Delta p_y$  est maximale pour :

$$\frac{d}{db} \left( b \sqrt{a_0^2 - b^2} \right) = 0$$

La déviation est maximale pour :  $a_0^2 - b^2 = b^2$  c.à.d. pour  $b = a_0/\sqrt{2}$ , soit :

$$\Delta p_m = \frac{4. Z. e^2. b^2}{a_0^3. v_0}$$

On vérifie que :

$$\Delta p_m = \frac{2. Z. e^2}{a_0. v_0}$$

11) De la même manière que dans la question 8), à la sortie d'un atome d'or, la déviation est donnée par :

$$\tan \theta_S = \frac{\dot{y}_S}{\dot{x}_S} = \frac{m. \dot{y}_S}{m. \dot{x}_S} = \frac{\Delta p_m}{m. v_0}$$

Si on note  $\delta\theta$  la déviation (exprimée en radians), dans l'hypothèse des petits angles :

$$\delta\theta = \frac{\Delta p_m}{m. v_0}$$

En explicitant :

$$\delta\theta = \frac{2. Z. e^2}{m. a_0. v_0^2}$$

On vérifie que :

$$\delta\theta = \frac{Z. e^2}{a_0. E_C} \quad \text{avec} \quad E_C = \frac{1}{2} m. v_0^2$$

A.N. :  $\delta\theta = 2,3. 10^{-4}$  rad. = 0,013 °

12) En considérant que le diamètre d'un atome d'or est  $2. a_0$ , sur une longueur  $L$  chaque particule subit  $N = L/2. a_0$  collisions :

$$\Delta\theta = \delta\theta \sqrt{\frac{L}{2. a_0}}$$

A.N. : ...en ordre de grandeur  $\Delta\theta = 1^\circ$  : la déviation reste faible dans ce modèle.

## II.C Rétrodiffusion des particules $\alpha$ dans le modèle de Rutherford

13) Exprimons l'énergie mécanique d'une particule  $\alpha$ . Sachant que la particule  $\alpha$  ne pénètre pas dans l'atome d'or, la particule  $\alpha$  de charge  $2. q_e$  subit la force électrique de charge  $Z. q_e$  exercée par le noyau de l'atome d'or. Cette force dérive de la fonction énergie potentielle :

$$E_p(r) = \frac{2. Z. q_e^2}{4. \pi. \epsilon_0. r} = \frac{2. Z. e^2}{r}$$

En explicitant l'énergie mécanique (qui est constante) loin de l'atome d'or puis quand elle atteint sa distance minimale d'approche :

$$E_m = E_C = \frac{2. Z. e^2}{r_0}$$

On établit que :

$$r_0 = \frac{2. Z. e^2}{E_C}$$

14) A.N. :  $r_0 = 5,7. 10^{-15}$  m : ce qui correspond à l'ordre de grandeur du noyau d'un atome.

### III. Instabilité d'un modèle d'atome « classique »

15) On note  $E$  l'énergie mécanique de l'électron dans le modèle planétaire :

$$E = E_C + E_P$$

Avec :

$$E_P = \frac{-q_e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} = \frac{-e^2}{R} \quad \text{et} \quad E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'électron qui décrit une trajectoire circulaire :

$$-m \cdot \frac{v^2}{R} = \frac{-q_e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2} = \frac{-e^2}{R^2} \quad \text{sur} \quad \vec{u}_r$$

On en déduit que :

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{e^2}{2 \cdot R}$$

On vérifie que :

$$E = -\frac{e^2}{2 \cdot R}$$

16) En explicitant la puissance  $\mathcal{P}$  :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{6 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^3} q^2 a^2 = \frac{1}{6 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^3} \left( \frac{v^2}{R} \right)^2 = \frac{2 e^2}{3 c^3} \left( \frac{v^2}{R} \right)^2 = \frac{2 e^6}{3 m^2 \cdot c^3 R^4}$$

$$\mathcal{P} = \frac{2 e^6}{3 m^2 \cdot c^3 R^4}$$

17) Appliquons le théorème de la puissance cinétique à l'électron :  $\frac{dE}{dt} = -\mathcal{P}$

En explicitant :

$$\frac{d}{dt} \left( -\frac{e^2}{2 \cdot R} \right) = -\frac{2 e^6}{3 m^2 \cdot c^3 R^4}$$

$$\frac{e^2}{R^2} \frac{dR}{dt} = -\frac{4 e^6}{3 m^2 \cdot c^3 R^4}$$

On vérifie que :

$$R^2 \cdot \frac{dR}{dt} = -\frac{4 e^4}{3 m^2 \cdot c^3}$$

18) En primitivant, on établit que :

$$\frac{1}{3} R^3(t) = -\frac{4 e^4 \cdot t}{3 m^2 \cdot c^3} + A \quad \text{où} \quad A \text{ est une cte d'intégration}$$

Sachant qu'à  $t = 0$ ,  $R(0) = a_0$  :

$$R^3(t) = -\frac{4 \cdot e^4 \cdot t}{m^2 \cdot c^3} + a_0^3$$

On détermine le temps de vie de l'atome en posant que :  $R^3(\tau) = 0$  soit :

$$\frac{4 \cdot e^4 \cdot \tau}{m^2 \cdot c^3} = a_0^3 \quad \text{on établit que} \quad \tau = \frac{m^2 \cdot c^3 \cdot a_0^3}{4 \cdot e^4}$$

19) A.N. :  $\tau = 1,0 \cdot 10^{-10}$  s : la durée de vie de l'atome est extrêmement faible !