T.D. n° 1 Mécanique

Thème : Cinématique du point

A.1: Test d'accélération d'une voiture

Une voiture est chronométrée pour un test d'accélération en ligne droite avec départ arrêté (vitesse initiale nulle).

1) Elle est chronométrée à 26,6 s au bout d'une distance $D = 180\ m$. Déterminer l'accélération (supposée constante) et la vitesse atteinte à la distance D.

2) Quelle est alors la distance d'arrêt pour une décélération de $7{,}00\ m.s^{-2}$?

A.2: Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre. Il ressent une accélération $a = g_0.\left(\frac{R}{r}\right)^2$, où $R = 6400\ km$ est le rayon de la Terre, $g_0 = 9{,}80\ m.s^{-2}$ et r est le rayon de l'orbite. La période de révolution du satellite est égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même.

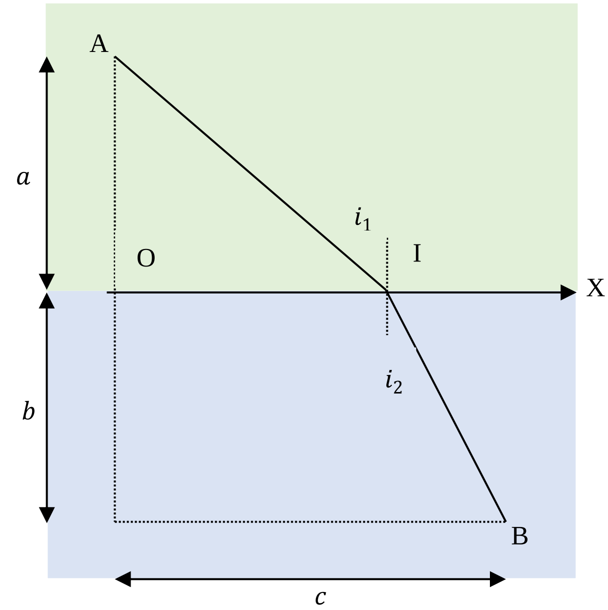
1) Calculer la période T de rotation de la Terre en secondes, puis la vitesse angulaire ω.

2) Déterminer l'altitude de l'orbite géostationnaire.

3) Déterminer sa vitesse sur sa trajectoire et calculer sa norme.

B.1: Illustration du principe de Fermat

Un individu que nous appellerons "le sauveteur" assimilé à un point M est initialement au repos sur la plage au point A alors qu'une personne se trouve en difficulté en mer au point B. Pour lui porter secours, le sauveteur rentre dans l'eau au point I. On pose $OI = x$. Sa vitesse sur le sable est notée v_1 et sa vitesse dans l'eau v_2.



1) Déterminer le temps mis par le sauveteur pour aller du point A au point B.

2) Quelle trajectoire doit-il emprunter pour minimiser son temps de parcours. On exprimera cette condition en fonction des angles i_1 et i_2.

On pose $v_1 = \frac{c}{n_1}$ avec n_1 indice du sable (par analogie avec l'optique géométrique) et note $v_2 = \frac{c}{n_2}$

3) Montrer que la trajectoire empruntée par M satisfait la loi de Snell-Descartes relative à la réfraction.

4) Rappeler le principe de Fermat et commenter ce résultat.

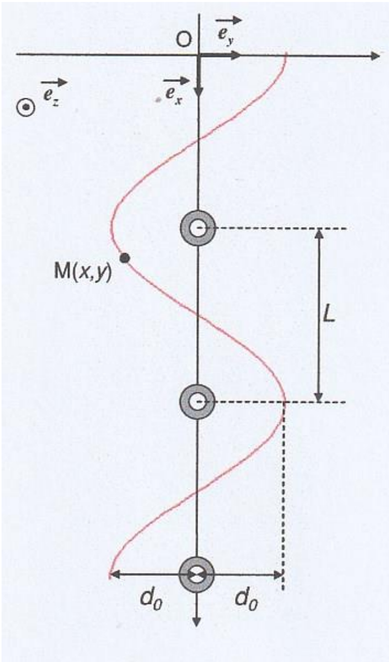
B.2: Mouvement d'un ballon sonde en présence de vent latéral

Nous étudions le mouvement d'un ballon sonde en présence d'un vent latéral. Le ballon est assimilé à un point M observé dans le référentiel terrestre R_T. On note (OX) la direction horizontale et (OZ) la direction verticale ascendante. La vitesse verticale de M est constante. L'étude du mouvement de M se fait dans la base de coordonnées cartésiennes $(O, \vec{\imath}, \vec{k})$. Le vecteur vitesse de M dans R_T a pour expression : $\vec{v}(M)_{R_T} = \frac{z(t)}{\tau}\vec{\imath} + v_0.\vec{k}$ avec τ et v_0 constantes.

1) Déterminer les lois horaires du mouvement x(t) et z(t) ainsi que l'équation de la trajectoire x(z). Représenter la trajectoire du ballon dans le référentiel d'étude.
2) Calculer le vecteur accélération $\vec{a}(M)_{R_T}$.
3) On note $\vec{a}(M)_{R_T} = a_n.\vec{n} + a_t.\vec{t}$ l'accélération de M dans la base de Frénet. Dans cette expression, $a_t = \frac{dv}{dt}$ est l'accélération tangentielle et a_n l'accélération normale. Sachant que cette base est orthonormée, déterminer l'expression de l'accélération normale a_n.

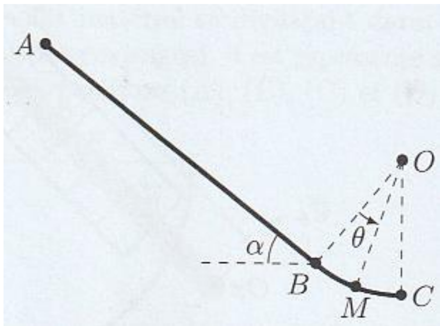
B.3 : Expériences de cinématique avec un skieur…

A-Première partie : Super G



Lors d'une descente de super G, un skieur repéré par le point M de coordonnées (x, y) dans le référentiel $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ part du point $(0, d_0)$ puis est astreint a suivre une trajectoire sinusoïdale de slalom entre des portes espacées d'une distance L de manière à conserver a tout moment une vitesse dont la composante suivant Ox est constante : $\dot{x} = v_0 = 40\ \mathrm{km.h^{-1}}$.
1) Expliquer en quelques mots, en quoi consiste la cinématique du point.
2) La trajectoire se met sous la forme $y(x) = A.\cos(B.x)$. Exprimer A et B en fonction de d_0 et L.
3) Exprimer $x(t)$ puis $y(t)$.
4) En déduire les expressions des vecteurs vitesse et accélération du skieur.
5) Pour que le skieur reste en piste, il doit conserver à tout moment une accélération inférieure à $0{,}70.\mathrm{g}$. (avec $g = 9{,}8\ \mathrm{m.s^{-2}}$). A quelle distance minimum L_{min} doit-on placer les portes. On donne $d_0 = 3{,}0\ m$. Faire l'application numérique.

B-Deuxième partie : Saut à ski



Le skieur s'élance en A sur un tremplin constitué de deux parties représentées en coupe sur la figure ci-contre. Le skieur est assimilé à un point M glissant dans le plan vertical de la figure. Le début de la piste entre A et B est rectiligne, de longueur $L = AB = 60\ m$ et de pente caractérisée par l'angle $\alpha = 35°$. La fin de la piste entre B et C est assimilée à un arc de cercle de rayon $R = 10\ m$. Nous nous limitons à l'étude de la phase d'élan. Le skieur s'élance en A à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale. Entre A et B son mouvement est rectiligne et uniformément accéléré, d'accélération de norme $a_0 = 5{,}6\ m.s^{-2}$
1) Déterminer les vecteurs vitesse $\vec{v}(M)$ et position $\overrightarrow{AM}(t)$ du skieur à chaque instant au cours de cette première phase.
2) A quel instant le skieur arrive-t-il en B ? Quelle est alors la norme v_B de sa vitesse ?

Entre B et C le mouvement de M est circulaire et l'angle θ permet de repérer sa position. La vitesse angulaire $\dot{\theta}$ dépend de θ selon la loi $\dot{\theta} = \omega_0.\sqrt{\cos(\alpha - \theta) + \beta}$ où $\omega_0 = 1{,}4\ rad.s^{-1}$ et β est une constante.
3) En utilisant les conditions aux limites en $\theta = 0$, déterminer la constante β.
4) Etablissez les expressions de la vitesse et de l'accélération de M dans la base de coordonnées polaires.

5) Montrer que :

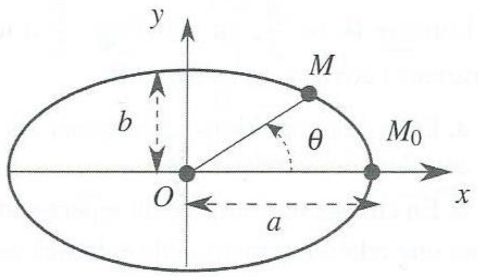
$$\vec{a}(M) = \frac{R.\omega_0^2}{2}\sin(\alpha-\theta).\vec{u}_\theta - R.\omega_0^2.(\cos(\alpha-\theta)+\beta).\vec{u}_r$$

Qualifier le mouvement de M entre B et C
6) Déterminer la norme v_C de la vitesse du skieur en C.

B.4 : Mouvement hélicoïdal
Un point matériel M se déplace le long d'une hélice circulaire dans le référentiel R. Son mouvement est donné en coordonnées cylindriques par : $r = a$; $\theta(t) = \omega.t$; $z(t) = b.\theta(t)$, où a, b et ω sont des constantes.
1) Représenter l'allure de la trajectoire de M dans R.
2) Donner l'expression de la vitesse $\vec{v}(M)_R$ en coordonnées cylindriques.
3) En déduire que le mouvement de M est uniforme.
4) Exprimer l'accélération de M dans R en coordonnées cylindriques.
5) L'accélération orthoradiale est nulle. Montrer que ceci implique que le système satisfait la loi des aires, à savoir $C = r^2.\dot{\theta}$ avec C constante. Commenter.

B.5 : Mouvement sur une ellipse
Un point M se déplace sur une ellipse d'équation cartésienne $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ dans le référentiel R. On note θ l'angle que fait $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe (Ox). Les coordonnées de M peuvent s'écrire :

$$x(t) = \alpha.\cos(\omega.t+\varphi)$$
$$y(t) = \beta.\cos(\omega.t+\psi)$$



où l'on suppose que la vitesse angulaire ω est constante.
1) A $t = 0$, le point M est en M_0. Déterminer α, φ et ψ.
2) Des autres données, déduire β.
3) Déterminer les composantes de la vitesse $(\dot{x}, \dot{y})$ et de l'accélération $(\ddot{x}, \ddot{y})$.
4) Montrer que l'accélération peut s'exprimer sous la forme : $\vec{a}(M)_R = -\omega^2.\overrightarrow{OM}$. Commenter.

B. 6 : Un homme sur une échelle
Un homme H monte à une échelle de longueur 2L. L'échelle est appuyée en A sur le sol d'axe (Ox) et en B sur un mur vertical d'axe (Oy) dans le référentiel R. Lorsque H a parcouru $\frac{3.L}{2}$, l'échelle glisse...
1) Etablir les équations horaires de la trajectoire en coordonnées cartésiennes (en fonction de l'angle $\theta(t)$ que fait l'échelle à l'instant t avec le plan horizontal).
2) Montrer que l'équation cartésienne de la trajectoire peut s'exprimer sous la forme :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

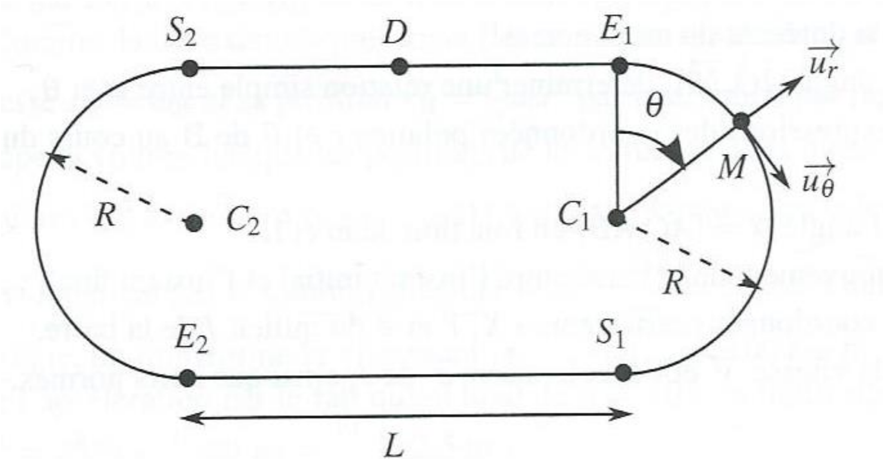
3) Représenter l'allure de la trajectoire dans R.
4) Calculer la vitesse de H ainsi que son accélération dans R dans l'hypothèse que le mouvement soit uniforme (on posera $\dot{\theta} = \omega$).

B.7 : Mouvement d'un point matériel sur une spirale logarithmique
Un point M décrit dans le référentiel R la courbe paramétrée d'équation :

$$\begin{cases} r(t) = b.e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} \\ \theta(t) = \omega.t \quad \text{avec } \omega \text{ et } \tau \text{ constantes positives.} \end{cases}$$

1) Représenter l'allure de la trajectoire.
2) Déterminer les composantes radiales et orthoradiales de la vitesse et de l'accélération de M.
3) Déterminer la norme du vecteur vitesse.
4) Déterminer l'angle que fait le vecteur vitesse avec le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$. Commenter ce résultat en représentant le vecteur vitesse sur la trajectoire à un instant t.
5) L'abscisse curviligne de M à l'instant t est définie par : $s(t) = \int_0^t ds$ (avec $ds = dl$ déplacement élémentaire dans R). Déterminer l'abscisse curviligne $s(t)$. Que devient l'abscisse curviligne pour $t \to \infty$? Commenter.

B.8 : Parcours d'un cycliste sur un vélodrome
On s'intéresse à un cycliste, considéré comme un point M, qui s'entraine sur un vélodrome constitué de deux demi-cercles reliés par deux lignes droites (voir figure ci-dessous). Données : $L = 62{,}0\ m$ et $R = 20{,}0\ m$. Le cycliste part de D avec une vitesse nulle.



1) Il exerce un effort constant ce qui se traduit par une accélération constante a_1 jusqu'à l'entrée E_1 du premier virage. Calculer le temps t_{E1}de passage en E_1 ainsi que la vitesse V_{E1} en fonction de a_1 et L.
2) Dans le premier virage, le cycliste a une accélération orthoradiale constante (suivant $\vec{u}_\theta$) et égale à a_1. Déterminer le temps t_{S1} de passage en S_1 ainsi que la vitesse V_{S1} en fonction de a_1, de L et R.
3) De même, en considérant que la norme de l'accélération est constante tout au long du premier tour et égale à a_1, déterminer les temps t_{E2}, t_{S2} et t_D (après un tour), ainsi que les vitesses correspondantes.
4) La course s'effectue sur quatre tours (1 km) mais on ne s'intéresse donc qu'au premier effectué en $t_1 = 18{,}155\ s$ (temps du britannique Chris Hoy aux Championnats du monde de 2007). Déterminer la valeur de l'accélération a_1 ainsi que la vitesse atteinte en D. La vitesse mesurée sur piste est d'environ 60 $km.h^{-1}$. Que doit-on modifier dans le modèle pour se rapprocher de la réalité ?

B.9 : Cardioïde, rayons de courbure
Un point M décrit dans le référentiel R une trajectoire plane d'équation :

$$r(\theta) = \frac{b}{2}(1 + \cos\theta(t))$$

en coordonnées polaires, avec b constante et $0 < \theta(t) < \pi$.
1) Tracer l'allure de la trajectoire à l'aide de quelques points particuliers.
2) On pose $\dot{\theta} = \omega$. Exprimer la vitesse $\vec{v}(M)_R$. En déduire la longueur $L = \int_0^\pi ds(t)$ de la trajectoire (avec $ds = dl$ déplacement élémentaire dans R).

3) Dans la suite de l'exercice on suppose que la vitesse angulaire est constante. Calculer l'accélération de M dans R.
4) Dans la base de Frenet, l'accélération de M dans R est donnée par $\vec{a} = a_t.\vec{t} + a_n.\vec{n}$ avec a_t et a_n composantes tangentielle et normale de l'accélération. Sachant que $a_t = \frac{dv}{dt}$ et que $a_n = \frac{v^2}{R_C}$ déterminer l'accélération tangentielle de M ainsi que son rayon de courbure R_C à un instant t quelconque.

Solutions : A.1: 1) En notant $t_1 = 26{,}6\ s$, $a = \frac{2.D}{{t_1}^2}$ et $v(t_1) = a.t_1$ A.N.: $a = 0{,}51\ m.s^{-2}$ et $v(t_1) = 13{,}5\ m.s^{-1}$ 2) Avec $a = -7\ m.s^{-2}$ (décélération donc $a < 0$), soit t_2 la durée nécessaire à l'arrêt du véhicule : $v(t_2) = a.t_2 + v(t_1) = 0$, $t_2 = -\frac{v(t_1)}{a} = 1{,}93\ s$. Distance d'arrêt : $D = \frac{1}{2}a.{t_2}^2 + v(t_1).t_2 = 13{,}0\ m$ **A.2:** 1) Période de rotation sidérale de la Terre : $T = 23h56\min 4s = 86164\ s$, vitesse angulaire de la Terre : $\omega = \frac{2.\pi}{T} = 7{,}29.10^{-5}\ rad.s^{-1}$ 2) $a = g_0.\left(\frac{R}{r}\right)^2 = r.\omega^2$ soit $r = \sqrt[3]{\frac{g_0.R^2}{\omega^2}}$ A.N. : $r = 42{,}3.10^3\ km$. Altitude d'un satellite géostationnaire : $h = r - R = 35{,}9.10^3\ km$ 3) $\vec{v} = r.\omega.\vec{u}_\theta$ et $v = r.\omega = 3{,}08\ km.s^{-1}$ **B.1:** 1) $t_{A\to B} = \frac{AI}{v_1} + \frac{IB}{v_2}$ avec $AI = \sqrt{a^2 + x^2}$ et $IB = \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$ 2) Le temps $t_{A\to B}$ est extremum pour $\frac{dt_{A\to B}}{dx} = 0$. En développant : $\frac{dt_{A\to B}}{dx} = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$; $\frac{dt_{A\to B}}{dx} = 0$ pour $\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{v_2}\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$ En notant que $\sin i_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ et que $\sin i_2 = \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$ nous établissons que $\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}$ 3) $n_1.\sin i_1 = n_2.\sin i_2$: on retrouve la loi de Snell-Descartes relative à la réfraction 4) Principe de Fermat : le chemin optique effectivement suivi par la lumière est stationnaire. Le principe de Fermat permet de démontrer les lois de Snell-Descartes **B.2:** 1) Par intégration : $x(t) = \frac{v_0}{2.\tau}.t^2$ et $z(t) = v_0.t$, équation cartésienne de la trajectoire : $x(z) = \frac{z^2}{2.\tau.v_0}$: trajectoire parabolique 2) $\vec{a}(M)_{R_T} = \frac{v_0}{\tau}\vec{u}_x$ 3) Norme du vecteur vitesse : $v = v_0.\sqrt{1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$; accélération tangentielle : $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{v_0.t}{\tau.\sqrt{t^2+\tau^2}}$ La base est orthonormée donc : $a^2 = {a_n}^2 + {a_t}^2$, ainsi : $a_n = \sqrt{a^2 - {a_t}^2} = \frac{v_0}{\sqrt{t^2+\tau^2}}$ **B.4:** 2) $\vec{v}(M)_R = a.\omega.\vec{u}_\theta + b.\omega.\vec{u}_z$ 3) Norme du vecteur vitesse : $v = \omega.\sqrt{a^2 + b^2}$ (en supposant $\omega > 0$), $v = cte$: le mouvement est uniforme 4) $\vec{a}(M)_R = -a.\omega^2.\vec{u}_r$ 5) $a_\theta = 2.\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2.\dot{\theta}\right) = 0$ donc $C = r^2.\dot{\theta} = cte$. **B.5:** 1) $x(t=0) = \alpha.\cos(\varphi) = OM_0 = a$. Si on pose $\varphi = 0$ alors $\alpha = a$. $y(t=0) = \beta.\cos(\psi) = 0$ donc $\psi = \frac{\pi}{2}$ mod.π. Nous retiendrons $\psi = -\frac{\pi}{2}$ (ce qui fixe la valeur de β cf 2)). 2) Soit t_1 l'instant t tel que $\omega.t_1 = \frac{\pi}{2}$: $y(t_1) = b$; en explicitant $y(t_1) = \beta.\cos\left(\omega.t_1 - \frac{\pi}{2}\right) = \beta.\cos(0) = \beta$ soit $\beta = b$. 3) $x(t) = a.\cos(\omega.t)$ et $y(t) = b.\sin(\omega.t)$; $\dot{x}(t) = -a.\omega.\sin(\omega.t)$ et $\dot{y}(t) = b.\omega.\cos(\omega.t)$; $\ddot{x}(t) = -a.\omega^2.\cos(\omega.t)$ et $\ddot{y}(t) = -b.\omega^2.\sin(\omega.t)$ 4) $\ddot{x}(t) = -\omega^2.x(t)$ et $\ddot{y}(t) = -\omega^2.y(t)$. Ainsi $\vec{a}(M)_R = \ddot{x}(t).\vec{u}_x + \ddot{y}(t).\vec{u}_y = -\omega^2.\left(x(t).\vec{u}_x + y(t).\vec{u}_y\right) = -\omega^2.\overrightarrow{OM}$ avec $\overrightarrow{OM} = x(t).\vec{u}_x + y(t).\vec{u}_y$: accélération centrale. **B.6:** 1) A un instant t quelconque, la position de l'homme dans le référentiel R est donnée par le vecteur position : $\overrightarrow{OH} = x(t).\vec{u}_x + y(t).\vec{u}_y$ avec $x(t) = \frac{L}{2}\cos\theta(t)$ et $y(t) = \frac{3.L}{2}\sin\theta(t)$ 2) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ avec $a = \frac{L}{2}$ et $b = \frac{3.L}{2}$: sur l'échelle, H décrit une portion de trajectoire elliptique 4) $\vec{v}(H)_R = \dot{x}(t).\vec{u}_x + \dot{y}(t).\vec{u}_y$ avec $\dot{x}(t) = -\frac{L\omega}{2}\sin\theta(t)$ et $\dot{y}(t) = \frac{3.L.\omega}{2}\cos\theta(t)$. Accélération : $\vec{a}(H)_R = \ddot{x}(t).\vec{u}_x + \ddot{y}(t).\vec{u}_y$ avec $\ddot{x}(t) =$

$-\frac{L\omega^2}{2}\cos\theta(t)$ et $\ddot{y}(t) = -\frac{3.L.\omega^2}{2}\sin\theta(t)$ **B.7:** 2) $\vec{v}(M)_R = -\frac{r}{\tau}\vec{u}_r + r.\omega.\vec{u}_\theta$ et $\vec{a}(M)_R = r.\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)\vec{u}_r - \frac{2.r.\omega}{\tau}.\vec{u}_\theta$ 3) Norme du vecteur vitesse : $v = r.\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}}$ 4) L'angle α entre le vecteur vitesse et le vecteur position est déterminer à l'aide du produit scalaire : $\vec{v}(M)_R.\overrightarrow{OM} = v.r.\cos\alpha = \dot{r}.r = -\frac{r^2}{\tau}$ avec $v = r.\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}}$: $\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{1+\omega^2.\tau^2}} < 0$ car $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 5) $s(t) = \int_0^t ds$ avec $ds = dl = v.dt$: $s(t) = \int_0^t v.dt = b.\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}}\int_0^t e^{-\frac{t}{\tau}}.dt = b.\sqrt{1+\omega^2.\tau^2}.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. Pour $t \to \infty$: $s(\infty) = b.\sqrt{1+\omega^2.\tau^2}$

B.8: 1) $t_{E1} = \sqrt{\frac{L}{a_1}}$ et $v_{E1} = \sqrt{L.a_1}$ 2) $t_{S1} = \sqrt{\frac{L}{a_1} + \frac{2.\pi.R}{a_1}}$ et $v_{S1} = \sqrt{L.a_1 + 2.\pi.R.a_1}$ 3) $t_{E2} = \sqrt{\frac{3.L}{a_1} + \frac{2.\pi.R}{a_1}}$ et $v_{E2} = \sqrt{3.L.a_1 + 2.\pi.R.a_1}$ puis $t_{S2} = \sqrt{\frac{3.L}{a_1} + \frac{4.\pi.R}{a_1}}$ et $v_{S2} = \sqrt{3.L.a_1 + 4.\pi.R.a_1}$. Après un tour complet : $t_D = \sqrt{\frac{4.L}{a_1} + \frac{4.\pi.R}{a_1}}$ et $v_D = \sqrt{4.L.a_1 + 4.\pi.R.a_1}$
4) $a_1 = 1{,}52\, m.s^{-2}$ et $v_D = 27{,}6\, m.s^{-1} = 99{,}4\, km.h^{-1}$. On constate la vitesse réelle est inférieure à v_D ce qui montre les limites du modèle à accélération constante. **B.8:** 2) $\vec{v}(M)_R = \frac{b.\omega}{2}(-\sin\theta\,\vec{u}_r + (1+\cos\theta(t)).\vec{u}_\theta)$. Norme du vecteur vitesse : $v = b.\omega.\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = b.\omega.\cos\frac{\theta}{2}$ avec $0 < \theta(t) < \pi$; $L = b.\omega.\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}dt = b.\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}d\theta = 2.b$ 3) $\vec{a}(M)_R = -\frac{b.\omega^2}{2}\left((1+2.\cos\theta(t)).\vec{u}_r + 2.\sin\theta(t).\vec{u}_\theta\right)$ 4) Accélération tangentielle $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{b.\omega^2}{2}\sin\frac{\theta(t)}{2}$ Base orthonormée : $a^2 = {a_n}^2 + {a_t}^2$, ainsi : $a_n = \sqrt{a^2 - {a_t}^2} = \frac{3.b.\omega^2}{2}\cos\frac{\theta(t)}{2} = \frac{v^2}{R_C}$ et $R_C = \frac{2.b}{3}\cos\frac{\theta(t)}{2}$