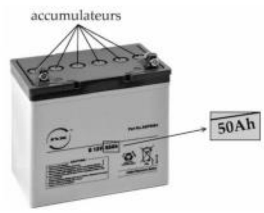
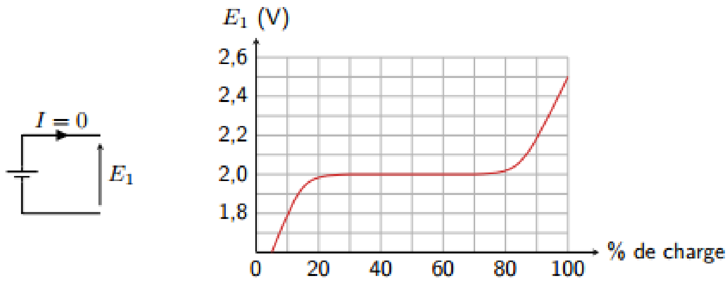
Problème 1: Recharge d'une batterie au plomb

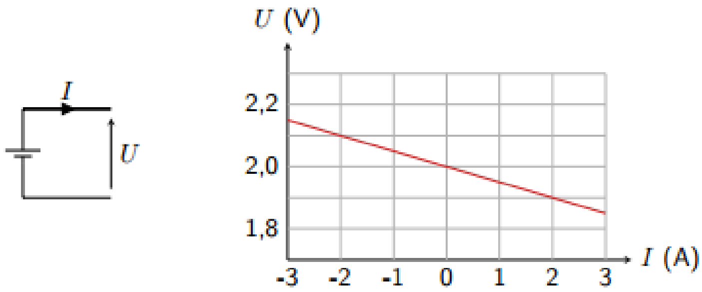
Une batterie au plomb est un ensemble de six accumulateurs identiques (cellules électrochimiques plomb-acide sulfurique) réunis dans un même boîtier. Une batterie met en œuvre une conversion entre énergie chimique et énergie électrique, processus pouvant avoir lieu dans les deux sens. Ainsi, une batterie présente un caractère générateur durant sa décharge et un caractère récepteur durant sa recharge. Ce type de batterie est largement utilisé dans l'équipement des véhicules automobiles.



Le graphique ci-dessous représente la tension à vide E_1 d'un accumulateur en fonction de son pourcentage de charge. On rappelle que la tension à vide d'un générateur, également appelée force électromotrice et souvent abrégée fem est la tension à ses bornes lorsqu'il ne débite aucun courant.



La figure ci-dessous représente la caractéristique statique d'un accumulateur chargé à 50%. On rappelle que la caractéristique d'un générateur décrit la façon dont varie la tension U à ses bornes lorsqu'il débite un courant I non nul.



Etude d'un accumulateur.

Intéressons-nous pour commencer à un seul des six accumulateurs de la batterie, dont on suppose la charge comprise entre 20% et 80%.

1) Justifier que l'on peut modéliser l'accumulateur par l'association en série d'une source idéale de fem constante E_1 et d'une résistance r_1. Donner la représentation de Thévenin équivalente à un accumulateur.

2) En déduire la tension U à ses bornes en fonction de E_1, r_1 et I l'intensité du courant qui le traverse en convention générateur.

3) Déterminer en justifiant les valeurs numériques de E_1 et r_1.

Caractéristique d'une batterie complète.

Comme indiqué dans le document, la batterie étudiée comporte un ensemble de six accumulateurs identiques à celui étudié précédemment. On les suppose tous chargés à 50%.

4) Comment doit-on associer ces six accumulateurs pour obtenir une batterie de tension à vide E_{batt} maximale ?

5) Donner la représentation de Thévenin équivalente à la batterie alors constituée ainsi que sa loi de comportement courant-tension. Indiquer en justifiant la valeur de la tension à vide E_{batt} et celle de la résistance interne de la batterie r_{batt}.

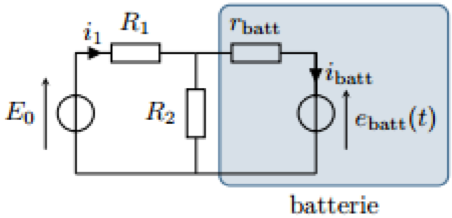
6) Tracer la caractéristique tension-courant $U = f(I)$ de la batterie considérée.

7) Le document indique qu'une batterie présente un caractère générateur durant sa décharge et un caractère récepteur durant sa recharge. Rappeler la définition des termes caractère générateur et caractère récepteur. Justifier, à partir de la loi de comportement ou de la caractéristique tension-courant, qu'une batterie chargée à 50% peut présenter les deux types de comportement.

Charge de la batterie.

Etudions maintenant le processus de recharge d'une batterie. Pour simplifier, on suppose qu'elle est complètement déchargée (pourcentage de charge nul) à l'instant $t = 0$ et que sa tension à vide vaut alors $e_{batt}(t = 0) = 0$. Conformément au document présenté ci-dessus, e_{batt} augmente au fur et à mesure de la charge.

La recharge est effectuée grâce à une source électrique modélisée par un générateur de force électromotrice $E_0 = 16$ V constante et de résistance interne négligeable. Elle est branchée au sein du montage représenté sur la figure ci-dessous, où les deux résistances $R_1 = 3{,}0\ \Omega$ et $R_2 = 5{,}0\ \Omega$ sont placées pour contrôler la charge de la batterie.



8) A quel dipôle la batterie est-elle équivalente au début de la charge, lorsqu'elle est complètement déchargée ? En déduire la valeur i_0 de l'intensité i_{batt} du courant qui la traverse.

9) On note i_2 l'intensité du courant dans R_2. Appliquer les lois de Kirchhoff au circuit.

10) En déduire que :

$$i_{batt} = \frac{R_2.E_0 - (R_1 + R_2).e_{batt}}{r_{batt}.R_1 + r_{batt}.R_2 + R_1.R_2}$$

11) Justifier que la recharge de la batterie cesse si i_{batt} s'annule.

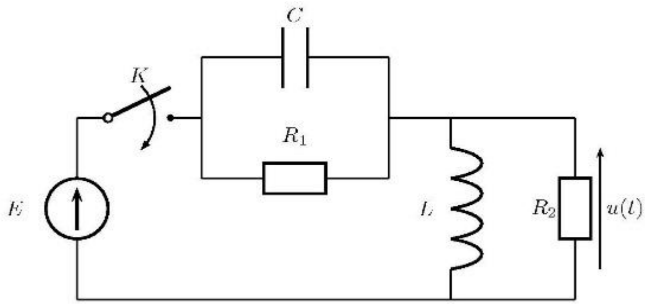
12) Déterminer la valeur de e_{batt} pour laquelle la recharge s'arrête.

13) Quand la charge s'arrête, peut-on considérer que la batterie est complètement chargée ?
Il est évidemment préférable que la recharge s'arrête (et donc que i_{batt} s'annule) lorsque la batterie est chargée à 100%. Quelle doit être alors la valeur de e_{batt} ?

14) On souhaite conserver $R_1 = 3{,}0\ \Omega$. Quelle valeur faut-il donner à R_2 ?

Problème 2 : Intensités et tensions dans un circuit

On considère le circuit ci-contre dans lequel tous les dipôles sont idéaux.
A un instant pris comme origine (t = 0), on ferme l'interrupteur, alors que le circuit était au repos depuis bien longtemps.



Reproduire et remplir le tableau suivant dans lequel on demande les expressions des intensités et des tensions pour chaque dipôle, à la fois en $t = 0^+$ (juste après la fermeture de l'interrupteur) et quand $t \to +\infty$ (quand un nouveau régime permanent constant est atteint).

On justifiera avec soin les expressions de $u(0^+)$, $i_C(0^+)$ et $u(t \to +\infty)$.

	C	R_1	L	R_2
$t = 0^+$	$i_C(0^+) =$ $u_C(0^+) =$	$i_{R_1}(0^+) =$ $u_{R_1}(0^+) =$	$i_L(0^+) =$ $u_L(0^+) =$	$i_{R_2}(0^+) =$ $u_{R_2}(0^+) =$
$t \to +\infty$	$i_C(+\infty) =$ $u_C(+\infty) =$	$i_{R_1}(+\infty) =$ $u_{R_1}(+\infty) =$	$i_L(+\infty) =$ $u_L(+\infty) =$	$i_{R_2}(+\infty) =$ $u_{R_2}(+\infty) =$

Problème 3: Analogies électromécaniques

Les analogies en Physique sont utiles à plusieurs titres. Par exemple, elles permettent d'établir des correspondances entre des phénomènes en apparence différents. D'un point de vue pédagogique, elles permettent d'aborder un phénomène nouveau en s'appuyant sur un phénomène qui aura déjà été étudié auparavant. C'est aussi une source très efficace d'inspiration pour les chercheurs. Leurs origines reposent bien souvent sur une similitude du formalisme utilisé : mêmes équations mais des dictionnaires différents pour l'interprétation des termes.

Ce sujet se propose d'étudier quelques aspects des analogies électromécaniques

1) Electrocinétique

On considère un circuit formé par un conducteur ohmique de résistance R, un condensateur de capacité C, une bobine de coefficient d'inductance L et un interrupteur ouvert K montés en série. Le condensateur est initialement chargé (son armature chargée positivement porte une charge notée q_0) et aucun courant ne circule dans les différents dipôles. À un instant pris comme origine des dates, on ferme l'interrupteur K.

$\boxed{1}$ Faire un schéma du montage pour $t > 0$ en précisant en particulier sur le dessin les tensions $u_R(t)$, $u_C(t)$ et $u_L(t)$, l'intensité $i(t)$ et la charge $q(t)$ étudiées.

On cherche à déterminer l'évolution de la charge $q(t)$ et de l'intensité $i(t)$ du courant dans le circuit pour $t > 0$.

$\boxed{2}$ Quel lien existe-t-il entre la charge $q(t)$ et l'intensité $i(t)$? En déduire une expression de $u_R(t)$, $u_C(t)$ et $u_L(t)$ en terme de $q(t)$ ou de ses dérivées.

$\boxed{3}$ Établir l'équation différentielle donnant l'évolution de la charge $q(t)$. Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme canonique suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2q(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_o}{Q}\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_o^2\, q(t) = 0 \qquad (1)$$

Exprimer les paramètres ω_o et Q en fonction des caractéristiques du circuit. Nommer et donner les unités ainsi que la signification physique de ces paramètres.

On se place désormais dans la situation où le circuit évolue en régime pseudopériodique.

$\boxed{4}$ Quelle condition cela impose-t-il sur le paramètre Q ? En prenant en compte les conditions initiales du circuit, déterminer la loi donnant l'évolution de $q(t)$. Justifier alors le qualificatif « pseudopériodique ».

$\boxed{5}$ Exprimer la pseudopériode T en fonction de ω_o et de Q.

$\boxed{6}$ On définit le *décrément logarithmique* δ par la relation

$$\delta = \ln\frac{q(t)}{q(t+T)}$$

Exprimer ce décrément logarithmique δ en fonction de Q.

$\boxed{7}$ Quels sont les autres types de régime possibles d'évolution du système ?

2) Mécanique classique

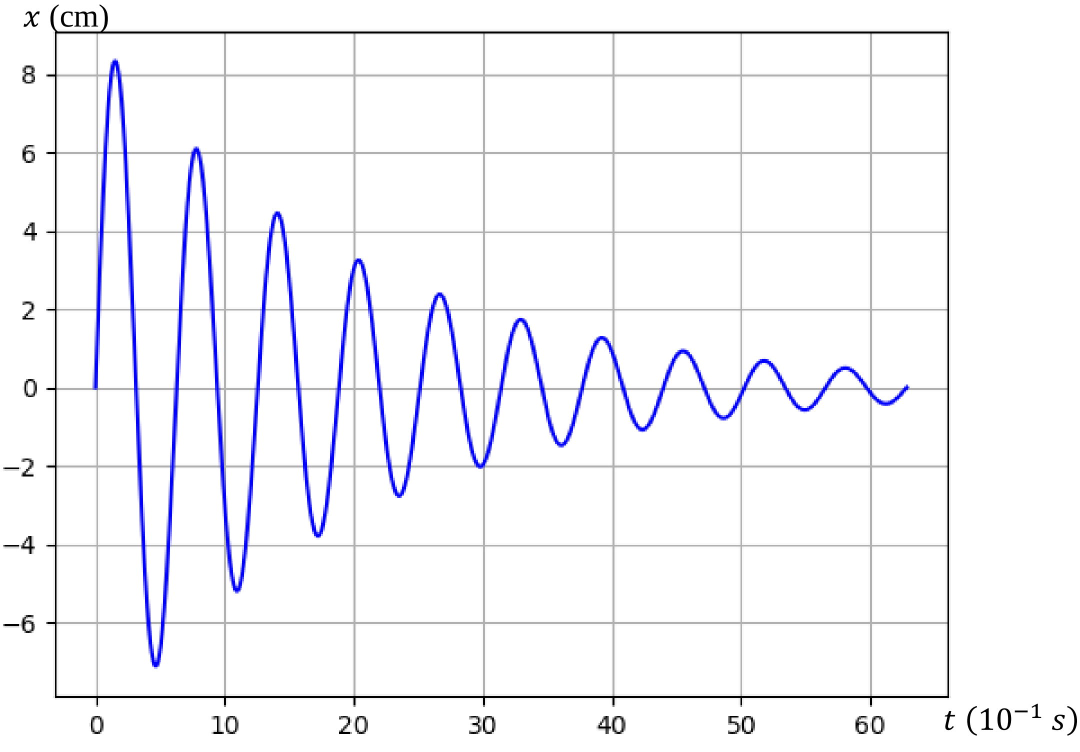
On considère maintenant un point matériel M de masse $m = 250\,\mathrm{g}$ qui se déplace horizontalement selon une direction (Ox), où l'origine O est choisie de telle sorte qu'elle coïncide avec la position d'équilibre du point M. Ce point matériel est soumis à la force de rappel d'un ressort idéal de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_o, ainsi qu'à une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda\,\dot{x}\,\vec{e}_x$ où λ désigne le coefficient de frottement et $\vec{e}_x$ un vecteur unitaire dirigeant l'axe (Ox). Il n'y a pas de frottements secs. L'étude est réalisée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

$\boxed{8}$ Faire un schéma de cette situation, puis établir l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$ du point matériel et la mettre sous une forme similaire à la relation (1).

$\boxed{9}$ Par comparaison avec le circuit RLC série précédent, déterminer les grandeurs mécaniques analogues à la charge $q(t)$, l'intensité $i(t)$, la résistance R, l'inductance L et la capacité C.

$\boxed{10}$ Quels sont les analogues électriques des énergies cinétique et potentielle élastique du ressort ?

La figure ci-dessous représente l'allongement $x(t)$ du point M au cours du temps



$\boxed{11}$ Déterminer graphiquement la position initiale x_0 ; la vitesse initiale v_0 ; la pseudo-période T du mouvement ainsi que son décrément logarithmique.

$\boxed{12}$ En déduire les coefficients Q et ω_o.

$\boxed{13}$ Déterminer les valeurs numériques des éléments mécaniques analogues à R, L et C.

Problème 4 : Modélisation du mouvement d'une plateforme en mer

On considère le mouvement d'une plateforme en mer soumise à un courant marin. Sa partie supérieure de masse $m = 110$ tonnes est considérée comme rigide et le mouvement principal de la plateforme a lieu suivant x (cf figure 1 (a)).
Afin d'étudier le mouvement de cette plateforme, on la représente par une masse m liée à un ressort de constante de raideur k et à un amortisseur de constante d'amortissement γ pouvant subir une excitation externed force $\vec{F}_{exc}$ et se déplaçant sur un support (cf figure 1 (b)). Le ressort représente la rigidité de l'ensemble du support de la plateforme. L'amortisseur permet de prendre en compte l'effet de l'eau environnante et la force excitatrice externe celui des vagues qui frappent périodiquement la plateforme. La masse est supposée se déplacer selon une seule direction parallèle à l'axe Ox en fonction du temps.

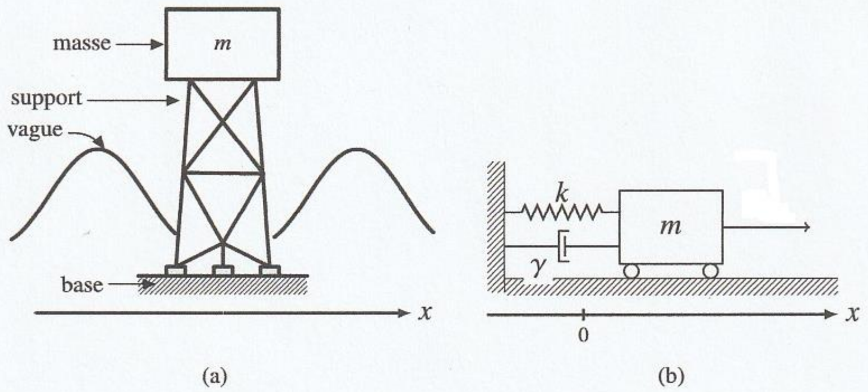


Figure 1 – (a) Plateforme en mer soumise aux vagues marines, (b) système masse (m), ressort (k), amortisseur (γ) et excitation externe

Les projections sur l'axe Ox de la position, de la vitesse et de l'accélération de la masse en fonction du temps sont notées respectivement $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$. La force totale $\vec{F}_{tot}$ agissant sur la masse correspond à la réaction normale $\vec{R}_N$ de la base horizontale, à la force de frottement $\vec{f}$, à la force de rappel $\vec{T}$ du ressort, au poids $\vec{p}$ de la masse et à la force $\vec{F}_{exc}$ d'excitation externe. La position d'équilibre de la masse sera choisie à $x = 0$. En absence d'action de l'amortisseur, la masse se déplace sur la base horizontale sans frottement.

Ressort sans amortissement et sans excitation

1) Démontrer que (en l'absence d'amortissement et sans excitation) l'équation du mouvement de la masse correspond à l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$m.\ddot{x} + k.x = 0$$

2) La solution de cette équation prend la forme générale suivante :

$$x(t) = A_0.\sin(\omega_0.t) + B_0.\cos(\omega_0.t)$$

avec A_0 et B_0 deux coefficients réels. Exprimer ω_0 en fonction des grandeurs caractéristiques du système et donner sa signification physique. De plus, en remarquant qu'à $t = 0$: $x(t) = x_0$ et $\dot{x}(t) = \dot{x}_0$ déterminer les expressions de A_0 et de B_0 en fonction de x_0, $\dot{x}_0$ et de ω_0.

3) On cherche à reformuler l'équation précédente sous une forme plus compacte du type :

$$x(t) = R_0.\cos(\omega_0.t - \varphi_0)$$

Donner les expressions de R_0 et de φ_0 en fonction de x_0, $\dot{x}_0$ et de ω_0.

4) Représenter qualitativement $x(t)$ en fonction de t et indiquer sur le tracé R_0, x_0 et $2.\pi/\omega_0$.

5) Rappeler les expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle élastique et montrer que l'énergie mécanique $E_m(t)$ du système est alors :

$$E_m(t) = \frac{k.R_0{}^2}{2}$$

6) Représenter qualitativement l'énergie cinétique, l'énergie potentielle élastique et l'énergie mécanique $E_m(t)$ en fonction du temps.

Ressort avec amortissement et sans excitation

7) La force de frottement que l'amortisseur exerce sur la masse est considérée comme linéaire, c'est-à-dire proportionnelle au vecteur vitesse $\vec{v}$ de celle-ci : $\vec{f} = -\gamma.\vec{v}$ avec γ constante d'amortissement ($\gamma > 0$). En considérant une projection sur l'axe Ox montrer que la position de la masse en fonction du temps suit l'équation du mouvement ci-après :

$$\ddot{x} + 2.\zeta.\omega_0.\dot{x} + \omega_0{}^2.x = 0$$

avec ω_0 défini à la question 2) et ζ à exprimer en fonction de γ, k et m.

8) Dans le cas où $\zeta < 1$, $x(t)$ prend la forme suivante :

$$x(t) = e^{-\alpha.t}.(A_1.\sin(\omega_1.t) + B_1.\cos(\omega_1.t))$$

Déterminer les constantes α et ω_1 en fonction de ω_0 et ζ puis déterminer les deux coefficients réels A_1 et B_1 en fonction de x_0, $\dot{x}_0$, ζ et ω_0. On utilisera pour cela les mêmes conditions initiales que celles utilisées à la question 2).

9) Montrer alors que l'on peut obtenir une forme du type :

$$x(t) = R_1.e^{-\zeta.\omega_0.t}.\cos(\omega_1.t - \varphi_1)$$

avec R_1 et φ_1 à exprimer en fonction des données.

10) Représenter qualitativement $x(t)$ en fonction de t et indiquer sur le tracé $R_1.e^{-\zeta.\omega_0.t}$, x_0 et $2.\pi/\omega_1$.

11) Donner l'expression de $E_m(t)$ dans le cas ou $\zeta^2 \ll 1$. Commenter le cas où $\zeta = 0$.

12) A quoi est dû la variation d'énergie mécanique au cours du temps ? Justifier.

13) On envisage deux temps successifs t_1 et t_2 pour lesquels les déplacements sont x_1 et x_2 tels que $t_2 > t_1$ et $t_2 - t_1 = T_1$: période des oscillations amorties. En utilisant la relation donnée à la question 9), et en supposant que $\zeta^2 \ll 1$, montrer que :

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = 2.\pi.\zeta$$

14) Le relevé du déplacement horizontal de la plateforme en fonction du temps est représenté en figure 2. En utilisant les deux points qui sont indiqués sur la figure, déterminer k, ζ et γ. Comment ce tracé serait modifié en fonction de la valeur de ζ ?

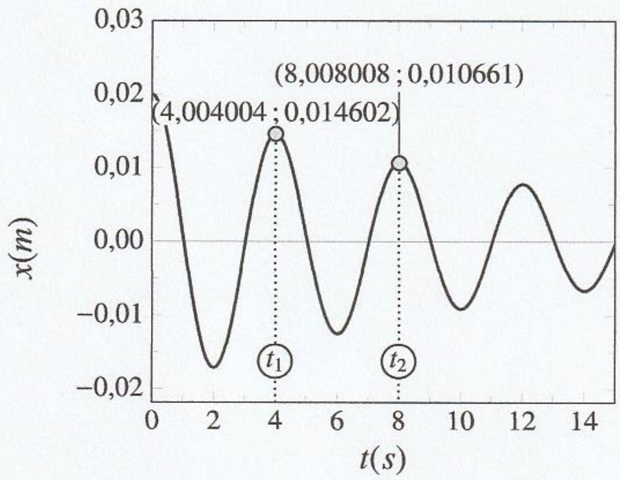


Figure 2 – Relevé du déplacement horizontal x (en m) de la plateforme de masse $m = 110$ tonnes en fonction du temps t (en s).

Ressort avec amortissement et avec excitation

On envisage enfin le cas où le système est soumis à la fois aux effets d'amortissement et d'excitation. On se limite à la réponse à une excitation harmonique sinusoïdale de pulsation ω produite par une force extérieure au système :

$$\vec{F}_{exc} = F_0.\cos(\omega.t).\vec{u}_x$$

avec $\vec{u}_x$ vecteur unitaire sur l'axe Ox.

15) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ devient :

$$\ddot{x} + 2.\zeta.\omega_0.\dot{x} + {\omega_0}^2.x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega.t)$$

16) En régime forcé, la solution $x(t)$ est du type :

$$x(t) = X.\cos(\omega.t - \varphi)$$

Comment définit-on le régime forcé ?

17) On adopte les notations complexes. On note $\underline{X} = X.e^{j.\varphi}$. Montrer que :

$$\begin{cases} X = \dfrac{F_0}{m}\dfrac{1}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + (2.\zeta.\omega_0.\omega)^2}} \\ \tan\varphi = \dfrac{2.\zeta.\omega_0.\omega}{{\omega_0}^2 - \omega^2} \end{cases}$$

18) Exprimer la grandeur $M = \frac{k.X}{F_0}$ en fonction de $r = \omega/\omega_0$ et expliciter le sens physique de M.

19) A quelle condition sur ζ la fonction M admet-elle un maximum ? Déterminer la pulsation pour laquelle le maximum est observé.

20) Si l'on considère une période moyenne des vagues en mer de 8,0 s que peut-on conclure sur le mouvement de la plateforme ?