Chap V : Théorème du moment cinétique

Introduction : Notre objectif est d'établir le théorème du moment cinétique à un point matériel M observé dans un référentiel R galiléen. Dans ce chapitre, nous appliquerons ce théorème au pendule simple avant de l'appliquer à l'étude d'un système soumis à une force centrale dans le chapitre VI, et de le généraliser à la mécanique du solide dans les chapitres VII et VIII.

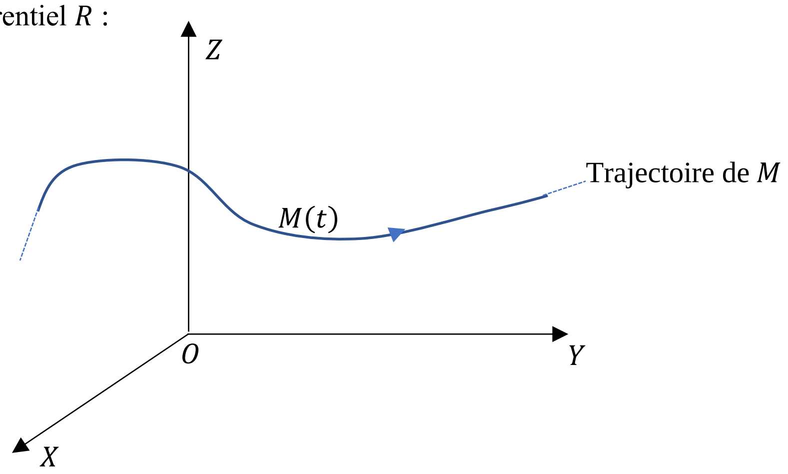
I : Moment cinétique

1) Définition

Soit M un point matériel de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}(M)_R$ dans le référentiel R. La quantité de mouvement de M dans R notée $\vec{p}(M)_R$ est donnée par :

$$\vec{p}(M)_R = m.\vec{v}(M)_R$$

Soit O l'origine du référentiel R :



Le moment cinétique de M par rapport au point O dans le référentiel R, noté $\vec{L}(O)_R$ est défini par :

$$\boxed{\vec{L}(O)_R = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}(M)_R}$$

Par définition du produit vectoriel :

- Le moment cinétique est orthogonal au plan défini par les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{p}(M)_R$.
- Le sens de $\vec{L}(O)_R$ est donné par les règles d'orientation directes (exemple : règle des 3 doigts de la main droite).
- La norme du moment cinétique notée $L(O)_R = \left\|\vec{L}(O)_R\right\|$ est donnée par :

$$L(O)_R = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|.\|\vec{p}(M)_R\|.\left|\sin\left(\overrightarrow{OM},\vec{p}(M)_R\right)\right|$$

Homogénéité et unité :

Le moment cinétique est homogène à :

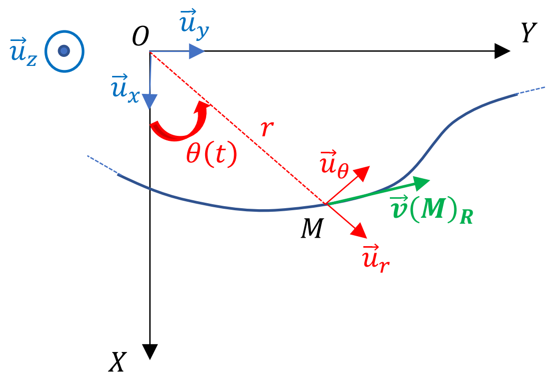
$$[L(O)_R] = \left[\left\|\overrightarrow{OM}\right\|.\|\vec{p}(M)_R\|\right] = M.L^2.T^{-1}$$

L'unité du moment cinétique dans les Unités du Système International est le : $kg.m^2.s^{-1}$.

Rq. : On peut noter que le moment cinétique est homogène à une « action » (cf cours de Mécanique Quantique, h (ou $\hbar$) est également homogène à une action). Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, le moment cinétique de l'électron vérifie la relation : $L(O)_R = n.\hbar$ avec $n \in N^*$ appelé nombre quantique principal.

2) Illustration

Considérons un point matériel M de masse m décrivant une trajectoire quelconque dans le plan (O, X, Y). Explicitons le moment cinétique $\vec{L}(O)_R$ de M par rapport à O dans R en coordonnées polaires :



En coordonnées polaires, nous savons que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = r.\vec{u}_r \\ \vec{v}(M)_R = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta \end{cases}$$

Explicitons $\vec{L}(O)_R = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}(M)_R$:

$$\vec{L}(O)_R = m.\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r.\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = m.r^2.\dot{\theta}.\vec{u}_z$$

On vérifie que $[L(O)_R] = M.L^2.T^{-1}$. Si $\dot{\theta} = 0$ (donc $\theta(t) = $ cte) la trajectoire de M est rectiligne. Le moment cinétique M par rapport à O dans R est nul : $L(O)_R = 0$.

Pour que le moment cinétique de M par rapport à O dans R soit différent de zéro, il faut que M tourne autour de l'axe OZ… c'est-à-dire, que M soit en rotation dans R.

II : Moment d'une force

1) Définition

Supposons désormais que le point matériel M soit soumis à l'action d'une force $\vec{F}$ dans le référentiel R supposé galiléen. On note $\vec{M}(O)_{\vec{F}}$ le moment par rapport à O de la force $\vec{F}$ défini par :

$$\boxed{\vec{M}(O)_{\vec{F}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}}$$

Par définition, le moment d'une force est orthogonal au plan défini par les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$ (cf I.1) pour le sens et la norme du moment).

Homogénéité et unité :

Le moment d'une force est homogène à :

$$[M(O)_F] = [\|\overrightarrow{OM}\|.\|\vec{F}\|] = M.L^2.T^{-2}$$

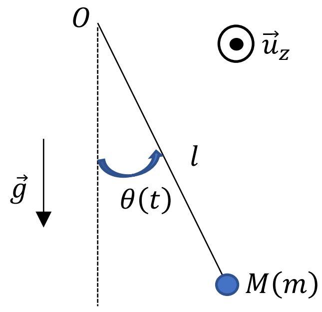
L'unité du moment d'une force dans les Unités du Système International est le Joule (symbole J) ou $kg.m^2.s^{-2}$.

Rq. : on constate que le moment d'une force est homogène à une énergie, mais aussi au moment cinétique divisé par un temps.

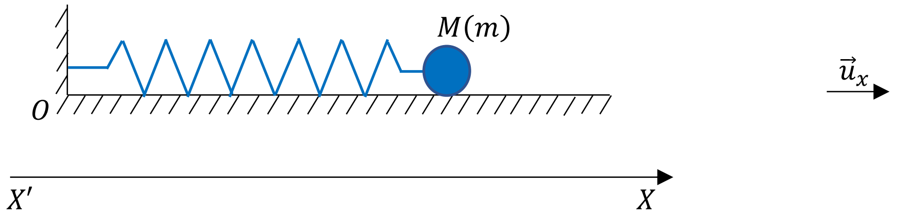
2) Illustrations

Exemple 1 : déterminons le moment du poids par rapport à O d'un pendule simple composé d'un fil inextensible de longueur l (de masse négligeable) et d'un point matériel M de masse m dont la position par rapport à sa position d'équilibre est repérée par l'angle $\theta(t)$:

$$\vec{M}(O)_{\vec{p}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = -m.g.l.\sin\theta\,(t).\vec{u}_z$$



Exemple 2 : Considérons un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. Déterminons le moment de la force de rappel par rapport à O exercé par le ressort sur un point matériel M de masse m libre de se déplacer sur un axe horizontal $X'X$:



Nous savons que la force de rappel exercée par le ressort sur le point matériel M est donné par la loi de Hooke : $\vec{T} = -k.(l(t) - l_0).\vec{u}_x$. On en déduit que le moment de la force de rappel par rapport à O est :

$$\vec{M}(O)_{\vec{T}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = -k.l(t).(l(t) - l_0).(\vec{u}_x \wedge \vec{u}_x) = \vec{0}$$

III : Théorème du moment cinétique

1) Enoncé

Soit O un point fixe dans le référentiel R galiléen. Le théorème du moment cinétique établit que la dérivée par rapport au temps du moment cinétique $\vec{L}(O)_R$ d'un point matériel M de masse m dans R est égal à la somme des moments des forces par rapport à ce point :

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{L}(O)_R}{dt}\right)_R = \sum \vec{M}(O)_{\vec{F}}}$$

2) Démonstration

Considérons un point matériel M de masse m soumis à la somme des forces extérieures $\sum \vec{F}_{ext}$ dans le référentiel R supposé galiléen. Sachant que le moment cinétique du point M par rapport à O dans R est donné par :

$$\vec{L}(O)_R = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}(M)_R$$

Dérivons le moment cinétique $\vec{L}(O)_R$ du point M par rapport au temps :

$$\left(\frac{d\vec{L}(O)_R}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R \wedge \vec{p}(M)_R + \overrightarrow{OM} \wedge \left(\frac{d\vec{p}(M)_R}{dt}\right)_R$$

Avec $\vec{p}(M)_R = m.\vec{v}(M)_R$, **si le point O est fixe dans R** alors : $\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \vec{v}(M)_R$ et :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R \Lambda\, \vec{p}(M)_R = m.(\vec{v}(M)_R \Lambda\, \vec{v}(M)_R) = \vec{0}$$

Il reste alors :

$$\left(\frac{d\vec{L}(O)_R}{dt}\right)_R = \overrightarrow{OM}\,\Lambda\left(\frac{d\vec{p}(M)_R}{dt}\right)_R$$

Appliquons désormais le principe fondamental de la dynamique au point M dans le référentiel R galiléen :

$$\left(\frac{d\vec{p}(M)_R}{dt}\right)_R = \sum \vec{F}_{ext}$$

En notant que :

$$\overrightarrow{OM}\,\Lambda\left(\frac{d\vec{p}(M)_R}{dt}\right)_R = \overrightarrow{OM}\,\Lambda \sum \vec{F}_{ext} = \sum \vec{M}(O)_{\vec{F}}$$

On établit ainsi le théorème du moment cinétique (T.M.C.) par rapport à un point O fixe dans R galiléen :

$$\left(\frac{d\vec{L}(O)_R}{dt}\right)_R = \sum \vec{M}(O)_{\vec{F}}$$

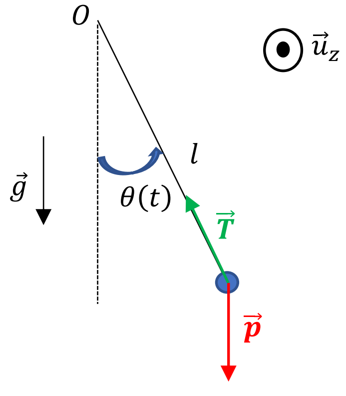
Ce théorème vient compléter le principe fondamental de la dynamique et les théorèmes énergétiques vus en première période. Compte tenu de son expression, l'utilisation de ce théorème est particulièrement pertinente dans l'étude des systèmes en rotations autour d'un axe. Nous allons illustrer ce théorème dans l'étude du pendule simple vu en première période.

3) Application : pendule simple sans frottement

Considérons un pendule simple composé d'un fil inextensible (de masse négligeable) de longueur l et d'une masse assimilée à un point matériel M de masse m. Le pendule décrit une trajectoire plane dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le point matériel M est soumis à son poids $\vec{p}$ ainsi qu'à la tension $\vec{T}$ du fil. Dans cette étude, nous négligerons tous les phénomènes dissipatifs.

Etablissons l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta(t)$ à partir du théorème du moment cinétique :

$$\left(\frac{d\vec{L}(O)_R}{dt}\right)_R = \sum \vec{M}(O)_{\vec{F}} = \overrightarrow{OM}\Lambda\,\vec{p} + \overrightarrow{OM}\Lambda\,\vec{T}$$



Dans la partie II.2) nous avons établi que le moment du poids par rapport au point fixe O à pour expression :

$$\vec{M}(O)_{\vec{p}} = \overrightarrow{OM}\Lambda\,\vec{p} = -m.g.l.\sin\theta\,(t).\vec{u}_z$$

Posons $\vec{T} = T.\vec{u}_r$ et explicitons le moment par rapport à O de la tension $\vec{T}$ exercée par le fil :

$$\vec{M}(O)_{\vec{T}} = \overrightarrow{OM}\Lambda\,\vec{T} = l.T(\vec{u}_r\,\Lambda\,\vec{u}_r) = \vec{0}$$

On établit ainsi que :

$$\sum \vec{M}(O)_{\vec{F}} = -m.g.l.\sin\theta\,(t).\vec{u}_z$$

Explicitons désormais $\left(\frac{d\vec{L}(O)_R}{dt}\right)_R$. Nous savons que $\vec{L}(O)_R = \overrightarrow{OM}\,\Lambda\,\vec{p}(M)_R$. Sachant que la trajectoire de M est plane, explicitons le moment cinétique $\vec{L}(O)_R$ dans la base de coordonnées polaires :

$$\vec{L}(O)_R = m.\begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ l.\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = m.l^2.\dot{\theta}(t).\vec{u}_z$$

On en déduit que :

$$\left(\frac{d\vec{L}(O)_R}{dt}\right)_R = m.l^2.\ddot{\theta}(t).\vec{u}_z$$

Appliquons le théorème du moment cinétique :

$$m.l^2.\ddot{\theta}(t).\vec{u}_z = -m.g.l.\sin\theta\,(t).\vec{u}_z$$

En projetant sur le vecteur unitaire $\vec{u}_z$ puis en divisant par $m.l^2$ on établit l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$:

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin\theta(t) = 0$$

Dans l'hypothèse de petits angles : $\sin\theta(t) = \theta(t)$. On vérifie que le pendule simple est assimilable à un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta}(t) + \omega^2.\theta(t) = 0$$

de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Cette équation que nous avons démontrée à partir du théorème du moment cinétique, nous savons également l'établir à partir du principe fondamental de la dynamique ou d'un théorème énergétique (cf cours première période).

4) Application : pendule simple avec frottement
En appliquant le théorème du moment cinétique, établissez l'équation différentielle du pendule simple en considérant désormais que le point matériel M est également soumis à l'action d'une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha.\vec{v}(M)_R$.

Avec $\vec{v}(M)_R = l.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$ la force de frottement est donnée par $\vec{f} = -\alpha.l.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$. En explicitant le moment de la force de frottement par rapport au point O :

$$\vec{M}(O)_{\vec{f}} = \overrightarrow{OM}\Lambda\,\vec{f} = -\alpha.l^2.\dot{\theta}.(\,\vec{u}_r\Lambda\,\vec{u}_\theta) = -\alpha.l^2.\dot{\theta}.\vec{u}_z$$

En appliquant le théorème du moment cinétique, nous établissons :

$$m.l^2.\ddot{\theta}(t).\vec{u}_z = -m.g.l.\sin\theta\,(t).\vec{u}_z - \alpha.l^2.\dot{\theta}.\vec{u}_z$$

Pour de petits angles, en projetant sur l'axe $\vec{u}_z$ nous établissons l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0$$