

Chap VI : Etude du mouvement d'un système soumis à une force centrale

Introduction : Dans ce chapitre, nous allons étudier le mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale conservative. Nous illustrerons cette étude avec le cas particulier des forces newtoniennes (dans ce cours, la force gravitationnelle). Après une approche graphique de la nature de la trajectoire (définition des états libres et états liés) nous étudierons les trajectoires circulaire et elliptique, ce qui nous conduira aux lois de Kepler. Nous finirons ce chapitre par un problème de concours dans lequel nous étudierons les caractéristiques d'une trajectoire hyperbolique.

I : Mouvement d'un système soumis à une force centrale

1) Force centrale

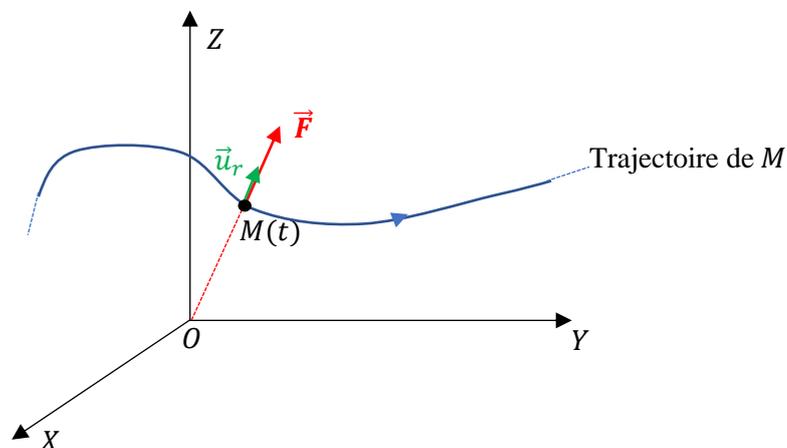
Soit M un point matériel observé dans un référentiel R galiléen. Ce point matériel est soumis à une force \vec{F} centrale si cette force est du type :

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u}_r$$

$$\text{avec } \vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{OM} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Quelle que soit la direction de la force \vec{F} , l'axe de la force passe par un point fixe O appelé centre de force. Une force centrale peut-être attractive ($F < 0$) ou répulsive ($F > 0$) :

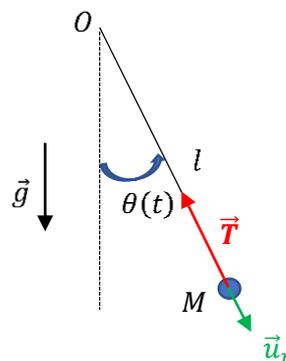
Illustration : force centrale répulsive



2) Exemples

-a- Tension d'un fil

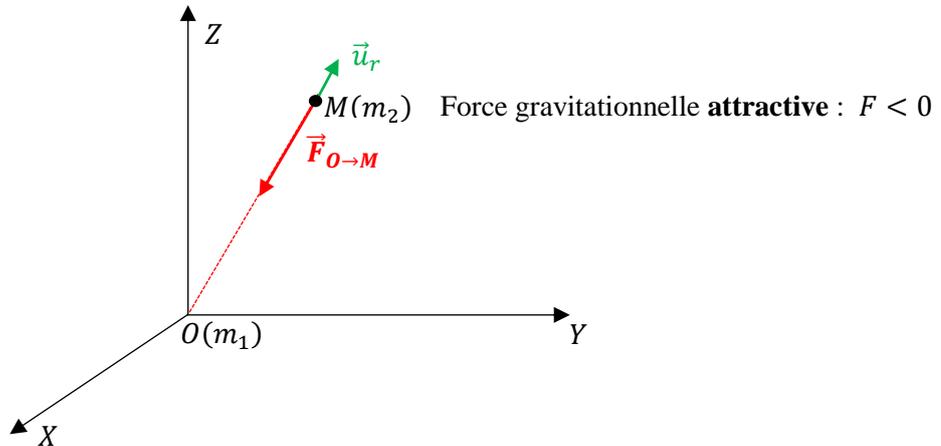
Dans un pendule simple, la force exercée par le fil sur le point matériel $M(m)$ est une force centrale : $\vec{T} = T \cdot \vec{u}_r$.



-b- Force gravitationnelle

Soit O et M deux points matériels de masses respectives m_1 et m_2 en interaction gravitationnelle. La force gravitationnelle $\vec{F}_{O \rightarrow M}$ exercée par O sur M est une force centrale :

$$\vec{F}_{O \rightarrow M} = F \cdot \vec{u}_r \text{ avec } F = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \text{ et } r = OM$$



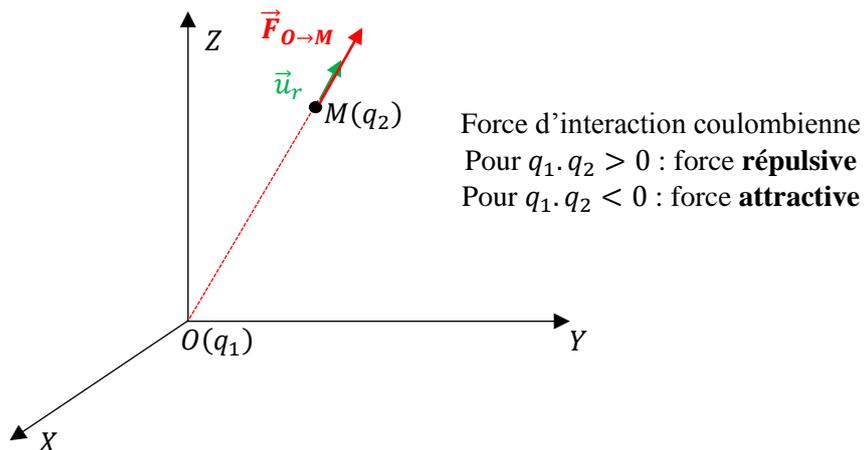
-c- Force d'interaction coulombienne

Soit q_1 et q_2 deux charges ponctuelles placées en O et M . La force d'interaction coulombienne $\vec{F}_{O \rightarrow M}$ exercée par O sur M est une force centrale :

$$\vec{F}_{O \rightarrow M} = F \cdot \vec{u}_r \text{ avec } F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \text{ et } r = OM$$

On vérifie que si les charges ponctuelles q_1 et q_2 sont de même signe ($q_1 \cdot q_2 > 0$) la force d'interaction coulombienne est **répulsive**. Par contre si les charges sont de signes opposés ($q_1 \cdot q_2 < 0$), la force d'interaction coulombienne est **attractive**.

Force d'interaction coulombienne pour $q_1 \cdot q_2 > 0$



3) Trajectoire plane

Considérons un point matériel M de masse m soumis uniquement à l'action d'une force centrale \vec{F} , de centre de force O , dans le référentiel R galiléen. Appliquons le théorème du moment cinétique à M :

$$\left(\frac{d\vec{L}(O)_R}{dt} \right)_R = \vec{M}(O)_{\vec{F}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Avec $\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{u}_r$ et $\vec{F} = F \cdot \vec{u}_r$:

$$\left(\frac{d\vec{L}(O)_R}{dt} \right)_R = (r \cdot \vec{u}_r) \wedge (F \cdot \vec{u}_r) = \vec{0}$$

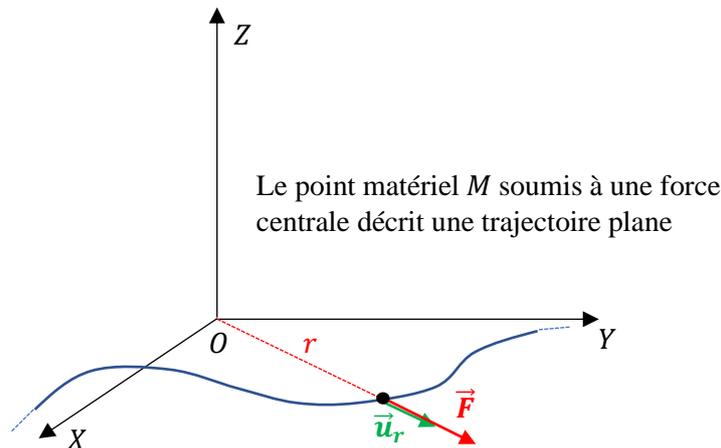
On en déduit que le moment cinétique d'un système soumis à une force centrale est un vecteur constant :

$$\vec{L}(O)_R = \overrightarrow{cte}$$

Avec $\vec{L}(O)_R = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}(M)_R$ le vecteur $\vec{L}(O)_R$ est à tout moment orthogonal au plan défini par \overrightarrow{OM} et $\vec{v}(M)_R$ (avec $\vec{p}(M)_R = m \cdot \vec{v}(M)_R$) par définition du produit vectoriel. On en déduit que la trajectoire de M est plane et que le plan du mouvement passe par le centre de force O . Ceci est une propriété fondamentale vérifiée par tout système soumis à une force centrale :

Le moment cinétique d'un système soumis à une force centrale est constant : $\vec{L}(O)_R = \overrightarrow{cte}$. Ceci implique que sa **trajectoire est plane** et que le plan du mouvement **passé par le centre de force**.

Plaçons le centre de force O à l'origine du référentiel R . Sachant que la trajectoire de M est plane, définissons les axes du référentiel R de telle manière que la trajectoire de M s'effectue dans le plan (O, X, Y) :



Sachant que la trajectoire de M est plane, explicitons le moment cinétique $\vec{L}(O)_R = \overrightarrow{cte}$ dans la base de coordonnées polaires.

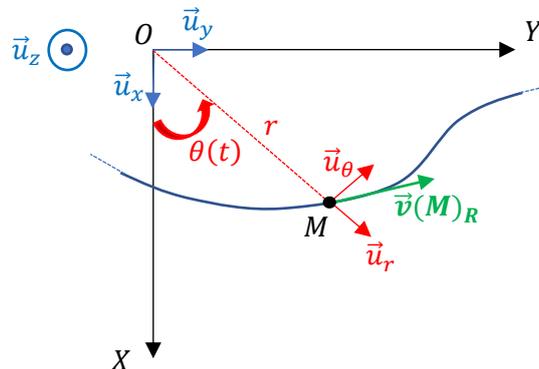
4) Loi des aires

Explicitons le moment cinétique du point matériel M de masse m soumis à une force centrale \vec{F} :

$$\vec{L}(O)_R = \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v}(M)_R = \overrightarrow{cte}$$

En coordonnées polaires (cf Chap. V, I.2) :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{u}_r \\ \vec{v}(M)_R = \dot{r} \cdot \vec{u}_r + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta \end{cases}$$



En explicitant, on établit que :

$$\vec{L}(O)_R = m \cdot \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \cdot \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_z = \overline{cte}$$

Avec $m = \text{cte}$ ceci implique que le système satisfait la loi des aires, à savoir que :

$$\mathcal{C} = r^2 \cdot \dot{\theta} = \text{cte}$$

Ainsi :

$$\vec{L}(O)_R = m \cdot \mathcal{C} \cdot \vec{u}_z = \overline{cte}$$

Commentaires :

- Dans cette expression, le rayon polaire $r(t)$ et la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ sont des fonctions du temps. C'est par souci d'efficacité que nous n'avons pas représenté cette dépendance au temps : $\mathcal{C} = r(t)^2 \cdot \dot{\theta}(t) = \text{cte}$.
- Si $\dot{\theta}$ était constant : $\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$ alors $r = \text{cte}$: la trajectoire de M serait circulaire et uniforme. Ceci est **un cas particulier** de mouvement possible pour M .
- Si $\dot{\theta} = 0$ alors $\theta(t) = \theta_0 = \text{cte}$: la trajectoire de M est rectiligne.
- Avec $r^2 > 0$, le signe de \mathcal{C} est fixé par celui de $\dot{\theta}(t)$ (qui peut-être positif ou négatif) et comme $\mathcal{C} = r^2 \cdot \dot{\theta} = \text{cte}$, le signe de $\dot{\theta}(t)$ ne peut changer donc le système tourne toujours dans le même sens.
- Dans la loi des aires, notons que la valeur de la constante $\mathcal{C} = \text{cte}$ est fixée par les données (conditions initiales ou conditions aux limites).

Rq : Nous avons montré que le système satisfait la loi de aires à partir du théorème du moment cinétique. Nous pouvons également établir cette relation à partir du principe fondamental de la dynamique. En effet, le système est soumis uniquement à la force $\vec{F} = F \cdot \vec{u}_r$ dans le référentiel R galiléen :

$$m \cdot \vec{a}(M)_R = F \cdot \vec{u}_r$$

donc l'accélération ortho-radiale est nulle : $a_\theta = 0$. En explicitant cette accélération en coordonnées polaires :

$$a_\theta = 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta} + r \cdot \ddot{\theta} = 0$$

En notant que :

$$\frac{dC}{dt} = 2 \cdot r \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta} + r^2 \cdot \ddot{\theta}$$

$$a_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{dC}{dt} \right) = 0 : \text{on vérifie que } C = r^2 \cdot \dot{\theta} = \text{cte}$$

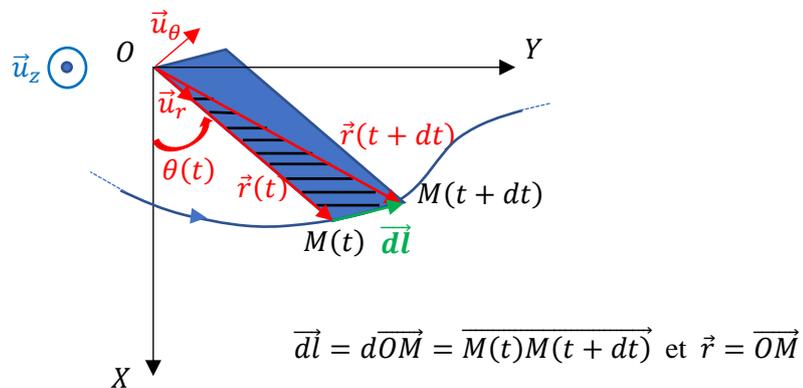
Pourquoi dit-on que le système satisfait la loi des aires ? Pour répondre à cette question, nous allons définir la « vitesse aréolaire » du système...

5) Vitesse aréolaire

On appelle vitesse aréolaire (notée \vec{v}_{ar}) la vitesse de balayage du plan du mouvement par le rayon polaire \vec{r} :

$$\vec{v}_{ar} = \frac{d\vec{S}}{dt}$$

avec $d\vec{S}$ surface élémentaire balayée par le rayon polaire \vec{r} entre t et $t + dt$. Cette surface $d\vec{S}$ (hachurée en noir sur fond bleu ci-dessous), correspond à la moitié de la surface du losange (surface bleu) de cotés $r(t)$ et dl :



On en déduit que :

$$d\vec{S} = \frac{\vec{r} \wedge d\vec{l}}{2}$$

En notant que $\vec{v}(M)_R = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{l}}{dt} \right)_R$ on établit que :

$$\vec{v}_{ar} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{\vec{r} \wedge \vec{v}(M)_R}{2}$$

En explicitant en coordonnées polaires :

$$\vec{v}_{ar} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \cdot \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{r^2 \cdot \dot{\theta}}{2} \vec{u}_z$$

On constate que :

$$\vec{v}_{ar} = \frac{C}{2} \vec{u}_z = \overline{cte}$$

Ainsi le vecteur vitesse aréolaire est constant. Ceci implique que **le rayon polaire balaye des surfaces égales pendant des durées égales**. Nous venons de montrer qu'un système satisfaisant la loi des aires possède une vitesse aréolaire constante.

Rq : la vitesse aréolaire est une vitesse de balayage du plan... Homogénéité : $[v_{ar}] = L^2 \cdot T^{-1}$, c.à.d. une surface divisée par un temps. Il ne faut pas confondre la vitesse aréolaire avec la vitesse du point M .

6) Energie potentielle effective

Supposons que la force centrale $\vec{F} = F \cdot \vec{u}_r$ soit conservative. Par définition, si on note δw le travail élémentaire de cette force entre t et $t + dt$:

$$\delta w = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -dE_P$$

En explicitant dans la base de coordonnées polaires :

$$d\vec{l} = dr \cdot \vec{u}_r + r \cdot d\theta \cdot \vec{u}_\theta$$

On en déduit que :

$$\delta w = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F \cdot dr = -dE_P$$

La force centrale $\vec{F} = F \cdot \vec{u}_r$ conservative dérive d'une fonction énergie potentielle $E_P(r)$ définie par :

$$F(r) = -\frac{dE_P(r)}{dr}$$

Appliquons le théorème de l'énergie mécanique au point matériel M de masse m soumis uniquement à la force centrale $\vec{F} = F(r) \cdot \vec{u}_r$ conservative dans le référentiel R galiléen :

$$dE_m(M)_R = \delta w^{nc} = 0$$

On en déduit que l'énergie mécanique de M est constante : $E_m(M)_R = \text{cte}$. En explicitant l'énergie mécanique :

$$E_m(M)_R = E_C(M)_R + E_P(r) = \text{cte}$$

Sachant que la trajectoire de M est plane, explicitons la vitesse et l'énergie cinétique dans la base de coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \vec{v}(M)_R = \dot{r} \cdot \vec{u}_r + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta \\ E_C(M)_R = \frac{1}{2} m \cdot v^2(M)_R = \frac{1}{2} m \cdot (\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\theta}^2) \end{cases}$$

Rq. : Notons que $v^2(M)_R = \vec{v}^2(M)_R = (\dot{r} \cdot \vec{u}_r + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta)^2 = \dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\theta}^2$.

On peut alors exprimer l'énergie mécanique sous la forme :

$$E_m(M)_R = \frac{1}{2} m \cdot (\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\theta}^2) + E_P(r) = \text{cte}$$

Sachant que le système vérifie la loi des aires : $\mathcal{C} = r^2 \cdot \dot{\theta} = \text{cte}$, exprimons l'énergie mécanique uniquement en fonction des variables r et \dot{r} :

$$E_m(M)_R = \frac{1}{2} m \cdot \dot{r}^2 + \frac{m \cdot \mathcal{C}^2}{2 \cdot r^2} + E_P(r) = \text{cte}$$

On constate que l'énergie mécanique $E_m(M)_R$ est la somme de deux fonctions, l'une qui ne dépend que de la vitesse radiale \dot{r} et l'autre qui ne dépend que du rayon polaire r . On appelle énergie potentielle effective (ou efficace), notée $E_{Peff}(r)$, cette seconde fonction qui ne dépend que de r :

$$E_m(M)_R = \frac{1}{2}m.\dot{r}^2 + E_{Peff}(r) = \text{cte}$$

$$E_{Peff}(r) = \frac{m.C^2}{2.r^2} + E_P(r)$$

Sachant que l'énergie mécanique est constante : $E_m(M)_R = \text{cte}$, si nous connaissons l'allure de la fonction énergie potentielle effective $E_{Peff}(r)$, il est possible de déterminer qualitativement la nature de la trajectoire de M dans le référentiel R est fonction de son énergie mécanique grâce à l'inégalité suivante (cf chap. III de mécanique) :

$$\frac{1}{2}m.\dot{r}^2 = E_m(M)_R - E_{Peff}(r) \geq 0$$

Nous allons illustrer cette méthode sur un système soumis à une force newtonienne (par définition, force proportionnelle à $1/r^2$). Pour cela, nous avons le choix...soit on considère un point matériel soumis à une force gravitationnelle, soit on considère un point matériel soumis à une force d'interaction coulombienne (cf TD n°5). Nous allons illustrer la méthode graphique en étudiant le mouvement d'un point matériel M de masse m soumis à une force gravitationnelle.

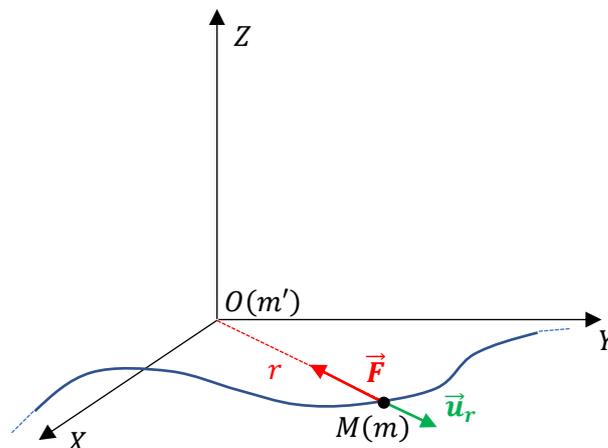
II : Approche qualitative de la nature de la trajectoire d'un système soumis à une force gravitationnelle

1) Présentation

Soit M un point matériel de masse m soumis à la force gravitationnelle \vec{F} exercée par une masse ponctuelle m' placée à l'origine O du référentiel R supposé galiléen :

$$\vec{F} = -\frac{G.m.m'}{r^2}\vec{u}_r$$

La force \vec{F} est une force centrale donc la trajectoire de M est plane et vérifie la loi des aires. Soit (O, X, Y) le plan du mouvement. Nous savons que la force gravitationnelle est une force conservative. Etablissons l'expression de la fonction énergie potentielle effective $E_{Peff}(r)$.



2) Energie potentielle effective

Afin de déterminer l'expression de l'énergie potentielle de gravitation (cf Chap. III de Mécanique) posons :

$$F(r) = -\frac{G \cdot m \cdot m'}{r^2} = -\frac{dE_P(r)}{dr}$$

En primitivant, on établit :

$$E_P(r) = -\frac{G \cdot m \cdot m'}{r} + A$$

Où A est une constante additive. Si on pose que $E_P(r) = 0$ pour $r \rightarrow \infty$ alors $A = 0$ et :

$$E_P(r) = -\frac{G \cdot m \cdot m'}{r}$$

Sachant que $E_{Pe\text{ff}}(r) = \frac{m \cdot c^2}{2 \cdot r^2} + E_P(r)$ on établit l'expression de la fonction énergie potentielle effective :

$$E_{Pe\text{ff}}(r) = \frac{m \cdot c^2}{2 \cdot r^2} - \frac{G \cdot m \cdot m'}{r}$$

3) Allure de la fonction énergie potentielle effective

- Pour $r \rightarrow 0$, $E_{Pe\text{ff}}(r) \sim \frac{m \cdot c^2}{2 \cdot r^2} \rightarrow \infty$
- Pour $r \rightarrow \infty$, $E_{Pe\text{ff}}(r) \sim -\frac{G \cdot m \cdot m'}{r} \rightarrow 0^-$
- La fonction $E_{Pe\text{ff}}(r)$ admet un minimum pour : $\left(\frac{dE_{Pe\text{ff}}(r)}{dr}\right)_{r_0} = 0$

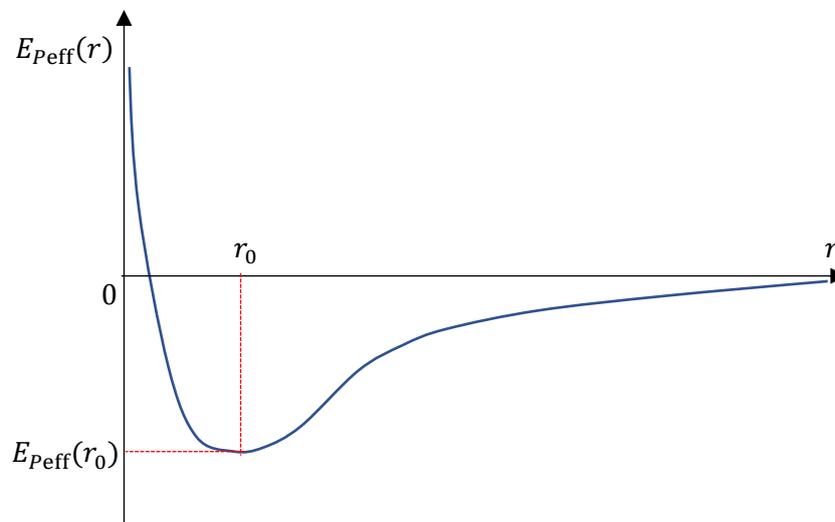
Déterminons r_0 ainsi que $E_{Pe\text{ff}}(r_0)$: $\frac{dE_{Pe\text{ff}}(r)}{dr} = -\frac{m \cdot c^2}{r^3} + \frac{G \cdot m \cdot m'}{r^2}$

$$\left(\frac{dE_{Pe\text{ff}}(r)}{dr}\right)_{r_0} = -\frac{m \cdot c^2}{r_0^3} + \frac{G \cdot m \cdot m'}{r_0^2} = 0$$

On établit ainsi que :

$$\begin{cases} r_0 = \frac{c^2}{G \cdot m'} \\ E_{Pe\text{ff}}(r_0) = -\frac{G \cdot m \cdot m'}{2 \cdot r_0} \end{cases}$$

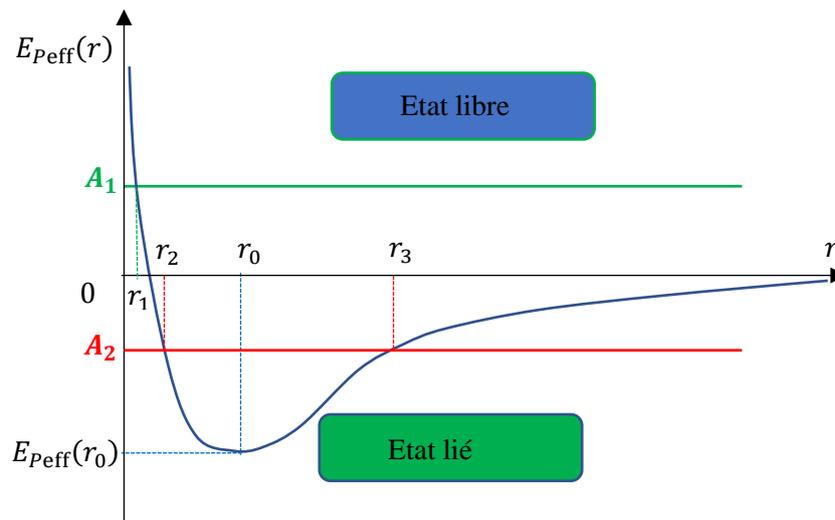
- Allure de $E_{Pe\text{ff}}(r)$:



4) Approche qualitative de la nature de la trajectoire

Sachant que $\frac{1}{2}m \cdot \dot{r}^2 = E_m(M)_R - E_{P\text{eff}}(r) \geq 0$ déterminons qualitativement la nature de la trajectoire de M est fonction de son énergie mécanique. Pour cela, posons $E_m(M)_R = A = \text{cte}$.

- Pour $E_m(M)_R = A_1 > 0$ on constate que $r \in [r_1, \infty[$: le système est dans un état libre (ou état de diffusion). Pour $r = r_1$ la vitesse radiale de M est nulle ($\dot{r} = 0$). On montre que cette configuration correspond à **une trajectoire hyperbolique**.
- Pour $E_m(M)_R = A_2 < 0$ on constate que $r \in [r_2 ; r_3]$: le système est dans un état lié. Pour $r = r_2$ ou r_3 ; la vitesse radiale de M est nulle ($\dot{r} = 0$). On montre que cette configuration correspond à **une trajectoire elliptique**.
- Pour $E_m(M)_R = E_{P\text{eff}}(r_0) : r = r_0$ donc la trajectoire de M est circulaire et uniforme (cf loi des aires : $r = \text{cte}$ alors $\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$). L'énergie mécanique de M dans R est : $E_m(M)_R = -\frac{G.m.m'}{2.r_0}$
- Pour $E_m(M)_R = 0$: le système est également dans un état de diffusion. Pour cette énergie mécanique, le système est à la frontière entre un état libre et un état lié (cf phénomènes de bifurcation et séparatrice dans l'espace des phases). Pour $E_m(M)_R = 0$, on montre que M décrit **une trajectoire parabolique**.



Bilan :

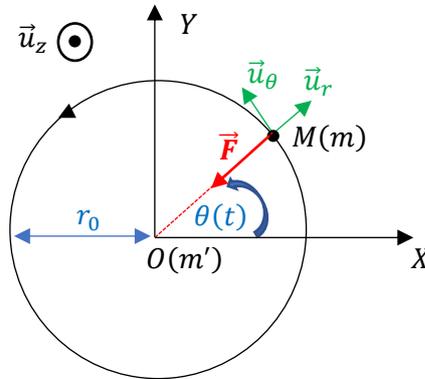
$E_m(M)_R > 0$	Etat libre : trajectoire hyperbolique
$E_m(M)_R = 0$	Etat libre : trajectoire parabolique
$E_m(M)_R < 0$	Etat lié : trajectoire elliptique
$E_m(M)_R = E_{P\text{eff}}(r_0)$	Etat lié : trajectoire circulaire et uniforme

Dans la suite, nous allons étudier tout particulièrement les trajectoires circulaire et elliptique.

III : Trajectoire circulaire

1) Energie mécanique

Etablissons l'expression de l'énergie mécanique $E_m(M)_R$ du point matériel M de masse m , soumis à la force gravitationnelle \vec{F} exercée par le point matériel O de masse m' placé à l'origine du référentiel R galiléen, en fonction de son énergie cinétique $E_C(M)_R$ puis de son énergie potentielle $E_P(r)$ pour une trajectoire circulaire et uniforme.



Nous savons que : $E_m(M)_R = E_C(M)_R + E_P(r_0) = \text{cte}$, avec $E_P(r_0) = -\frac{G.m.m'}{r_0}$ pour une trajectoire circulaire de rayon r_0 .

La trajectoire est circulaire donc $\vec{v}(M)_R = r_0 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$. Compte tenu du fait que le système satisfait la loi des aires : $\mathcal{C} = r^2 \cdot \dot{\theta} = \text{cte}$, si $r = r_0 = \text{cte}$ alors $\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$: la trajectoire est circulaire et uniforme (cf I.4). L'énergie cinétique de M dans R est donnée par : $E_C(M)_R = \frac{1}{2} m \cdot v^2(M)_R = \frac{1}{2} m \cdot r_0^2 \cdot \omega^2$. Soit :

$$E_m(M)_R = \frac{1}{2} m \cdot r_0^2 \cdot \omega^2 - \frac{G \cdot m \cdot m'}{r_0} = \text{cte}$$

Afin d'établir l'expression de $E_m(M)_R$ en fonction de $E_C(M)_R$ puis de $E_P(r_0)$ appliquons le principe fondamental de la dynamique à M dans le référentiel R :

$$m \cdot \vec{a}(M)_R = \vec{F}$$

En explicitant dans la base de coordonnées polaires, par projection sur \vec{u}_r :

$$-m \cdot r_0 \cdot \omega^2 = -\frac{G \cdot m \cdot m'}{r_0^2} \quad (1)$$

On en déduit que :

$$\frac{G \cdot m \cdot m'}{r_0} = m \cdot r_0^2 \cdot \omega^2$$

Ainsi :

$$E_m(M)_R = \frac{1}{2} m \cdot r_0^2 \cdot \omega^2 - m \cdot r_0^2 \cdot \omega^2 = -\frac{1}{2} m \cdot r_0^2 \cdot \omega^2 = -\frac{G \cdot m \cdot m'}{2 \cdot r_0}$$

On peut alors exprimer l'énergie mécanique $E_m(M)_R$ en fonction de $E_C(M)_R$ puis de $E_P(r_0)$:

$$E_m(M)_R = -E_C(M)_R = \frac{E_P(r_0)}{2}$$

Cette relation est rigoureusement vérifiée pour une trajectoire circulaire et uniforme. On peut noter que l'on retrouve bien l'expression de $E_m(M)_R$ établie pour une trajectoire circulaire en II.4.

2) Période de rotation

A partir de la relation (1) :

$$-m \cdot r_0 \cdot \omega^2 = -\frac{G \cdot m \cdot m'}{r_0^2}$$

Avec $\omega \cdot T = 2 \cdot \pi$, on établit l'expression de la période T de rotation du point M dans R :

$$\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot m'}$$

avec m' masse du centre de force. On reconnaît la troisième loi de Kepler (pour une trajectoire circulaire).

3) Vitesses cosmiques

-a- Vitesse de circularisation

A la distance r_0 du centre de force, la vitesse du point M appelée vitesse de circularisation, est donnée par :

$$v_c = r_0 \cdot \omega$$

Avec ω donnée par la relation (1) :

$$v_c = \sqrt{\frac{G \cdot m'}{r_0}}$$

-b- Vitesse en orbite circulaire basse

Supposons que le point matériel M soit soumis à la force gravitationnelle exercée par la Terre, de masse M_T :

$$v_c = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_0}}$$

Si le point M est à une altitude h au-dessus de la surface de la Terre, on pose $r_0 = R_T + h$ en notant R_T le rayon de la Terre :

$$v_c = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}}$$

Exprimons la vitesse de circularisation en fonction du champ de pesanteur g_0 (que l'on assimile au champ gravitationnel à la surface de la Terre) :

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$$

On établit ainsi que :

$$v_c = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{R_T + h}}$$

En orbite circulaire basse, on peut faire l'hypothèse que $h \ll R_T$. On établit l'expression de la vitesse :

$$v_{c,b} = \sqrt{g_0 \cdot R_T}$$

A.N. : Avec $g_0 = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $R_T = 6,40 \cdot 10^3 \text{ km}$, la vitesse de circularisation à la surface de la Terre est $v_{c,b} = 7,92 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

-c- Vitesse de libération

A la distance r_0 du centre de force, la vitesse de libération (notée v_l) est la vitesse minimale qu'il faut donner au point matériel M pour qu'il se « libère » de l'action du centre de force et puisse donc partir à l'infini. Par définition, **pour $v(M)_R = v_l$ l'énergie mécanique de M est nulle** (cf II.4) :

$$E_m(M)_R = \frac{1}{2} m \cdot v_l^2 - \frac{G \cdot m \cdot m'}{r_0} = 0$$

On établit l'expression de la vitesse de libération :

$$v_l = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m'}{r_0}}$$

Sachant qu'à la distance r_0 du centre de force, la vitesse de circularisation est :

$$v_c = \sqrt{\frac{G \cdot m'}{r_0}}$$

On peut exprimer la vitesse de libération en fonction de la vitesse de circularisation :

$$v_l = \sqrt{2} \cdot v_c$$

A.N. : A la surface de la Terre, la vitesse de libération est $v_l = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Illustration : rayon de Schwartzchild

Sachant que la vitesse maximale accessible est la célérité de la lumière, déterminons le rayon r_0 associé à une masse m' pour $v_l = c$:

$$c = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m'}{r_0}}$$

On établit l'expression du rayon de Schwartzchild :

$$r_0 = \frac{2 \cdot G \cdot m'}{c^2}$$

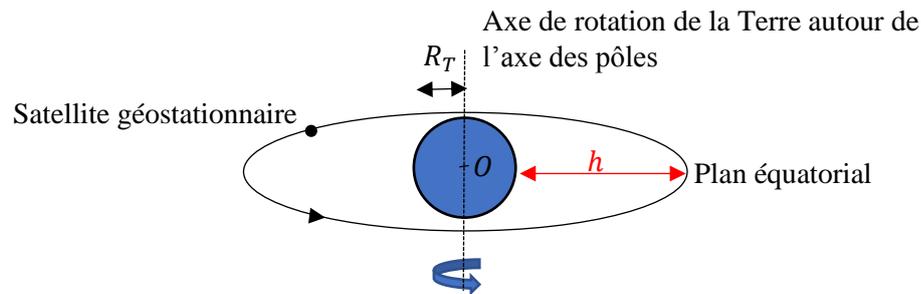
Ceci implique que rien ne peut s'échapper (pas même la lumière) d'un objet de masse m' et de rayon inférieur ou égal au rayon de Schwartzchild noté r_0 .

A.N. : pour un objet de masse $m' = M_S = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ masse du Soleil : $r_0 = 3,0 \text{ km}$. Ceci implique que si le rayon du Soleil était inférieur ou égal à $r_0 = 3,0 \text{ km}$, rien ne s'en échapperait, pas même la lumière...Ce serait un trou noir. Ce résultat que nous avons établi par une approche classique est confirmé par la théorie de la relativité générale.

4) Satellite géostationnaire

Un satellite terrestre est en orbite autour de la Terre. Un satellite terrestre est géostationnaire s'il est fixe dans le référentiel terrestre. Compte tenu du fait que la Terre tourne autour de l'axe des pôles avec une vitesse angulaire $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, un satellite géostationnaire possède la même vitesse angulaire ω dans le référentiel géocentrique.

Sa trajectoire est circulaire et s'effectue dans un plan qui passe par le centre de force O (ici le centre de la Terre) de masse M_T . Pour qu'un satellite soit fixe dans le référentiel terrestre, il faut donc que le satellite géostationnaire soit **dans le plan équatorial**. Déterminons l'altitude h d'un satellite géostationnaire :



Nous savons que la vitesse de circularisation est donnée par :

$$v_c = r_0 \cdot \omega = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_0}}$$

Soit :

$$r_0 = \left(\frac{G \cdot M_T}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{3}} = R_T + h$$

On en déduit l'expression de l'altitude h d'un satellite géostationnaire :

$$h = \left(\frac{G \cdot M_T}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{3}} - R_T$$

A.N. : avec $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $R_T = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$ on établit que $h = 36 \cdot 10^3 \text{ km}$.



IV : Trajectoire elliptique

1) Quelques propriétés des ellipses

Une ellipse est caractérisée par son demi-grand axe a , son demi-petit axe b et sa distance focale c (cf schéma ci-dessous). La distance focale est liée à a et b par la relation :

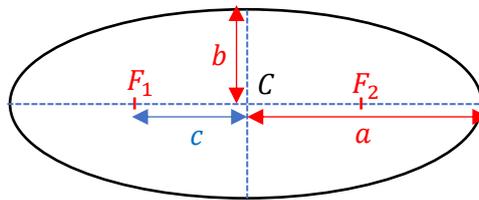
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Avec c définie positive :

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

On note C le centre de l'ellipse. Une ellipse possède deux foyers notés F_1 et F_2 symétriques par rapport à C . La distance focale est la distance qui sépare les foyers F_1 et F_2 du centre C :

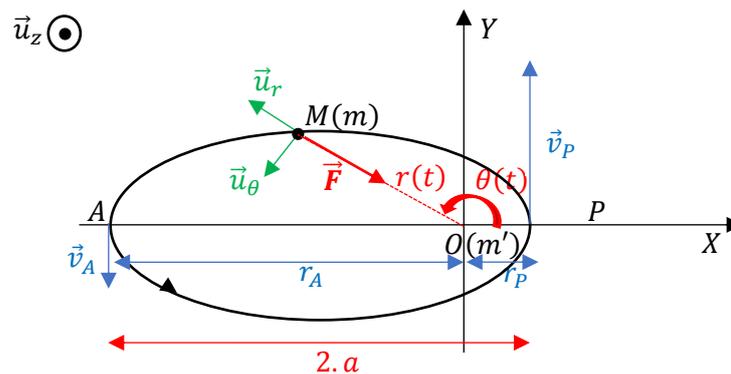
$$c = CF_1 = CF_2$$



Rq : le cercle est un cas particulier d'ellipse pour lequel la distance focale est nulle : $c = 0$ donc $a = b = r_0$. Les deux foyers sont confondus avec le centre C du cercle.

2) Trajectoire elliptique

Considérons un point matériel M de masse m soumis à la force gravitationnelle \vec{F} exercée par une masse ponctuelle m' placée en O , origine du référentiel R supposé galiléen. Supposons que le point M décrive une trajectoire elliptique. On montre que le centre de force O est à l'un des foyers (ici $O \sim F_2$) :



Supposons que le centre de force soit la Terre. On note A l'apogée et P le périhélie qui correspondent respectivement à la distance maximale et minimale entre le centre de force O et le point M . Ces distances sont notées r_A et r_P sur le schéma.

Rq. : si le centre de force est le Soleil, alors A et P sont respectivement l'aphélie et le périhélie.

On peut noter que A et P sont les seuls points de la trajectoire où le vecteur vitesse $\vec{v}(M)_R$ est orthogonal au rayon polaire $\vec{r} = \overline{OM}$. Compte tenu de la loi des aires, la vitesse à l'apogée (notée \vec{v}_A) est minimale alors que la vitesse au périhélie (notée \vec{v}_P) est maximale.

Relation entre la distance à l'apogée (r_A) la distance au périégée (r_P) et le demi-grand axe a de l'ellipse :

$$r_A + r_P = 2.a$$

3) Loi des aires

Explicitons la constante des aires \mathcal{C} en fonction de la distance et de la vitesse à l'apogée (r_A et v_A) puis en fonction de la distance et de la vitesse au périégée (r_P et v_P). Pour cela, exprimons le moment cinétique de M par rapport à O en chacun de ces points :

$$\vec{L}(O)_R = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}(M)_R = m.r^2.\dot{\theta}.\vec{u}_z = m.C.\vec{u}_z$$

$$\text{Au point } A : \vec{L}(O)_R = \overrightarrow{OA} \wedge m.\vec{v}_A = m.r_A.v_A.\vec{u}_z$$

$$\text{Au point } P : \vec{L}(O)_R = \overrightarrow{OP} \wedge m.\vec{v}_P = m.r_P.v_P.\vec{u}_z$$

On en déduit que :

$$C = r_A.v_A = r_P.v_P$$

4) Energie mécanique

L'énergie mécanique du point matériel M de masse m dans le référentiel R galiléen est donnée par :

$$E_m(M)_R = E_C(M)_R + E_P(r) = \text{cte}$$

Avec :

$$\begin{cases} E_P(r) = -\frac{G.m.m'}{r} \\ E_C(M)_R = \frac{1}{2}m.v^2(M)_R = \frac{1}{2}m.\dot{r}^2 + \frac{m.C^2}{2.r^2} \end{cases}$$

Etablissons l'expression de l'énergie mécanique $E_m(M)_R$ en fonction du demi-grand axe de l'ellipse. Pour cela, nous allons utiliser les propriétés géométriques des points A et P : aux points A et P , le vecteur vitesse est orthogonal au vecteur position donc la vitesse radiale est nulle :

$$\dot{r}_A = 0 \text{ et } \dot{r}_P = 0$$

Exprimons l'énergie mécanique aux points A ou P (avec $\dot{r} = 0$) :

$$E_m(M)_R = \frac{m.C^2}{2.r^2} - \frac{G.m.m'}{r}$$

On établit le polynôme du second ordre de la variable r :

$$r^2 + \left(\frac{G.m.m'}{E_m(M)_R}\right).r - \frac{m.C^2}{2.E_m(M)_R} = 0$$

On note Δ le discriminant définit par :

$$\Delta = \left(\frac{G.m.m'}{E_m(M)_R}\right)^2 + \frac{2.m.C^2}{E_m(M)_R}$$

Rq. : pour une trajectoire elliptique nous savons que $E_m(M)_R < 0$. Avec $E_m(M)_R > E_{P\text{eff}}(r_0)$ on peut vérifier que $\Delta > 0$ (cf II.4).

Les solutions de ce polynôme sont :

$$\begin{cases} r_1 = \frac{-\frac{G.m.m'}{E_m(M)_R} + \sqrt{\Delta}}{2} \\ r_2 = \frac{-\frac{G.m.m'}{E_m(M)_R} - \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$$

Rq. : compte tenu de l'expression de Δ on vérifie que r_1 et r_2 sont positives.

Par identification : $r_A = r_1$ et $r_P = r_2$. Avec $r_A + r_P = 2.a$, en sommant ces deux expressions, on établit que :

$$r_A + r_P = 2.a = -\frac{G.m.m'}{E_m(M)_R}$$

On établit ainsi l'expression de l'énergie mécanique du point matériel M en fonction du demi-grand axe a de l'ellipse :

$$E_m(M)_R = -\frac{G.m.m'}{2.a}$$

5) Vitesses à l'apogée et au périhélie

Sachant que l'énergie mécanique est donnée par :

$$E_m(M)_R = \frac{1}{2}m.v^2(M)_R - \frac{G.m.m'}{r} = -\frac{G.m.m'}{2.a}$$

Exprimons les vitesses à l'apogée et au périhélie en fonction des données :

A l'apogée :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m.v_A^2 - \frac{G.m.m'}{r_A} &= -\frac{G.m.m'}{2.a} \\ \frac{1}{2}m.v_A^2 &= G.m.m' \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2.a} \right) \end{aligned}$$

On établit ainsi que :

$$v_A = v_{min} = \sqrt{G.m' \cdot \left(\frac{2}{r_A} - \frac{1}{a} \right)}$$

De la même manière, on établit l'expression de la vitesse au périhélie :

$$v_P = v_{max} = \sqrt{G.m' \cdot \left(\frac{2}{r_P} - \frac{1}{a} \right)}$$

6) Période

Considérons une trajectoire elliptique de période T . A partir de la loi des aires et de l'expression de la surface d'une ellipse ($\mathcal{A} = \pi.a.b$, cf analogie avec la surface d'un disque), on montre que :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4.\pi^2}{G.m'}$$

On peut noter les analogies avec l'expression établie pour une trajectoire circulaire.

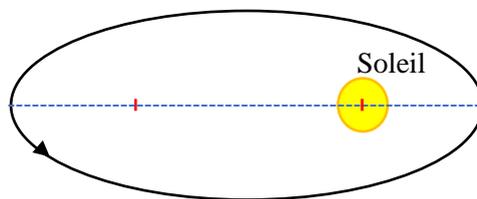
7) Lois de Kepler

A la fin de sa vie, le grand astronome Danois Tycho-Brahé demande à Johannes Kepler de vérifier la validité du modèle géo-héliocentrique avec les observations effectuées plus tôt à l'observatoire de Uranibjorg. Constatant un écart de l'ordre de $10'$ d'arc entre les observations et le modèle (ce qui correspond aux limites de performance des appareils de l'époque...) Johannes Kepler abandonne le modèle de Tycho-Brahé. Après de nombreuses années de calculs, Johannes Kepler établit les fameuses 3 lois entre 1609 et 1619. A l'époque, ces lois sont phénoménologiques. Il faudra attendre un peu plus d'un demi-siècle pour que Isaac Newton établisse une théorie classique de la gravitation dans les Principia Mathématique (1672) permettant de justifier ces fameuses 3 lois de Kepler.



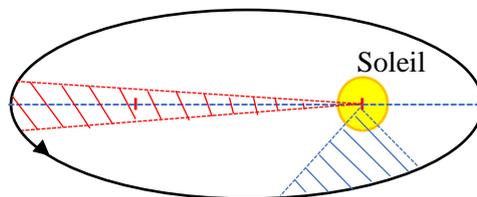
- Première loi de Kepler (1609)

Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques autour du Soleil qui en occupe l'un des foyers.



- Deuxième loi de Kepler (1609)

Les rayons des planètes balayent des surfaces égales pendant des durées égales



Ceci est une conséquence de la loi des aires $\mathcal{C} = r^2 \cdot \dot{\theta} = \text{cte}$ (ou $v_{ar} = \frac{c}{2} = \text{cte}$)

- Troisième loi de Kepler (1619)

Pour chacune des planètes, le carré de la période divisé par le cube du demi-grand axe de l'ellipse est une constante indépendante de la planète :

Sachant que pour une trajectoire elliptique, la période vérifie la relation :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot m'}$$

Avec m' masse du centre de force, pour les planètes du système solaire : $m' = M_S$ la masse du Soleil. On vérifie que :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M_S} = \text{cte}$$

8) Synthèse

Il existe des similitudes entre les expressions de la période et de l'énergie mécanique pour les trajectoires circulaires et elliptiques. Rappelons ces analogies dans le tableau ci-dessous :

	Energie mécanique	Troisième loi de Kepler
Trajectoire circulaire	$E_m(M)_R = -\frac{G \cdot m \cdot m'}{2 \cdot r_0}$	$\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot m'}$
Trajectoire elliptique	$E_m(M)_R = -\frac{G \cdot m \cdot m'}{2 \cdot a}$	$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot m'}$

V : Applications**V-1) Energie nécessaire pour mettre un satellite artificiel en orbite**

On étudie le mouvement d'un satellite de masse m en orbite circulaire à une altitude z autour de la Terre, ainsi que le lancement d'un satellite artificiel à partir d'un point O de la surface terrestre.

1) Dans quel référentiel se place-t-on pour étudier le mouvement d'un satellite terrestre ?

2) Energie d'un satellite artificiel en orbite

-a- Rappeler l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle du satellite en orbite à une distance r du centre de la Terre. En déduire son expression en fonction de son altitude z .

-b- Retrouver l'expression de la vitesse en orbite à une altitude z .

-c- En déduire l'expression de l'énergie cinétique puis de l'énergie mécanique E_m du satellite sur son orbite à l'altitude z .

-d- Calculer cette énergie mécanique pour $z = 1,00 \cdot 10^3 \text{ km}$ et $m = 6,00 \text{ tonnes}$.

3) Energie nécessaire au lancement d'un satellite

Pour lancer un satellite, il faut lui communiquer l'énergie $\Delta E_m = E_m - E_{m0}$ où E_{m0} est l'énergie qu'il a au point O.

-a- Dans le référentiel géocentrique, la Terre peut-être assimilée à un solide en rotation autour d'un axe à une vitesse angulaire Ω . Préciser l'axe de rotation. Est-il fixe ? Que vaut la vitesse angulaire ?

-b- En déduire l'expression de la vitesse du point O dans le référentiel géocentrique supposé galiléen en fonction de Ω , du rayon terrestre R_T et de latitude du lieu λ .

-c- Exprimer alors l'énergie mécanique initiale E_{m0} du satellite posé au sol au point O.

-d- En déduire les conditions les plus favorables pour le lancement du satellite. Parmi les trois champs de tirs suivants, lequel choisir de préférence ?

- Baïkonour au Kazakhstan $\lambda = 46,0^\circ$
- Cap Canaveral aux USA $\lambda = 28,5^\circ$
- Kourou en Guyane française $\lambda = 5,23^\circ$

-e- Calculer l'énergie nécessaire pour mettre le satellite en orbite basse depuis Kourou.

-f- Calculer numériquement l'énergie gagnée entre Baïkonour et Kourou. Commenter.

Données : Masse de la Terre $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; constante gravitationnelle $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, rayon terrestre $R_T = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$

Corrigé :

1) On se place dans le référentiel géocentrique. Ce référentiel dont l'origine est placée au centre d'inertie de la Terre est en translation (quasi) circulaire par rapport au référentiel héliocentrique. Dans cette étude, nous ferons l'hypothèse que le référentiel géocentrique est galiléen.

2)-a- Energie potentielle gravitationnelle du satellite en fonction de r puis de l'altitude z :

$$E_P(r) = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + z}$$

en posant arbitrairement que $E_P(\infty) \rightarrow 0$.

2)-b- Afin d'établir l'expression de la vitesse en fonction de l'altitude z , appliquons le principe fondamental de la dynamique au satellite assimilé à un point matériel M observé dans le référentiel géocentrique supposé galiléen :

$$m \cdot \vec{a}(M) = \vec{F}$$

où \vec{F} est la force gravitationnelle exercée par la Terre sur M :

$$\vec{F} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

Sachant que pour une trajectoire circulaire et uniforme (le système est soumis à une force centrale, donc il satisfait la loi des aires.... Si $r = \text{cte}$ alors $\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$) :

$$\vec{a}(M) = -r \cdot \omega^2 \cdot \vec{u}_r = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r$$

En projetant sur \vec{u}_r on établit :

$$-\frac{m \cdot v^2}{r} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2}$$

On en déduit que :

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + z}}$$

2)-c- Expression de l'énergie cinétique de M dans le référentiel géocentrique en fonction de z :

$$E_C(M) = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{G \cdot m \cdot M_T}{2 \cdot (R_T + z)}$$

On vérifie que $E_C(M) = -\frac{E_P(r)}{2}$ Avec $E_m(M) = E_C(M) + E_P(r)$ on établit que :

$$E_m(M) = -E_C(M) = \frac{E_P(r)}{2}$$

En explicitant :

$$E_m(M) = -\frac{G \cdot m \cdot M_T}{2 \cdot (R_T + z)}$$

2)-d- A.N. : $E_m(M) = -1,62 \cdot 10^{11} \text{ J}$

3)-a- La Terre est en rotation autour de l'axe des pôles, fixe dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. La vitesse angulaire est :

$$\Omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

Avec T période sidérale (proche de la période solaire). Avec $T = 23 \text{ h}56 \text{ mn}$:

$$\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

3)-b- Vitesse du point O dans le référentiel géocentrique :

Dans le référentiel géocentrique, le point O décrit une trajectoire circulaire et uniforme autour de l'axe des pôles.

Sa vitesse est orthoradiale : $\vec{v}(O) = v(O) \cdot \vec{u}_\theta$. En explicitant : $v = d \cdot \Omega$ avec $d = R_T \cdot \cos \lambda$

$$\text{Soit : } v(O) = R_T \cdot \Omega \cdot \cos \lambda$$

3)-c- Energie mécanique du satellite au repos à la surface de la Terre dans le référentiel géocentrique :

$$E_{m0} = \frac{1}{2} m \cdot v^2(O) - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}$$

En explicitant :

$$E_{m0} = \frac{1}{2} m \cdot (R_T \cdot \Omega \cdot \cos \lambda)^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}$$

3)-d- L'énergie de satellisation est :

$$\Delta E_m = E_m - E_{m0}$$

En explicitant :

$$\Delta E_m = -\frac{G \cdot m \cdot M_T}{2 \cdot (R_T + z)} + \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} - \frac{1}{2} m \cdot (R_T \cdot \Omega \cdot \cos \lambda)^2$$

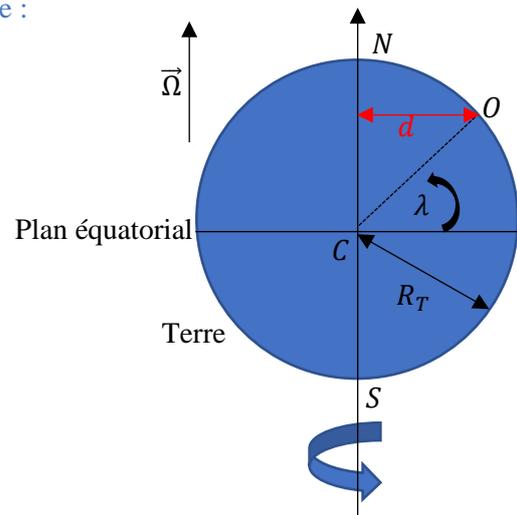
$$\Delta E_m = G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2 \cdot (R_T + z)} \right) - \frac{1}{2} m \cdot (R_T \cdot \Omega \cdot \cos \lambda)^2$$

En notant que dans le second membre de l'égalité, le premier terme est positif $\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2 \cdot (R_T + z)} > 0 \right)$ on vérifie que l'énergie de satellisation est d'autant plus faible que le second terme $\left(\frac{1}{2} m \cdot (R_T \cdot \Omega \cdot \cos \lambda)^2 \right)$ est grand, c.à.d. que λ est proche de zéro. La meilleure base de lancement est donc à Kourou en Guyane française.

3)-e- A.N. : $\Delta E_m(\text{Kourou}) = 2,12 \cdot 10^{11} \text{ J}$

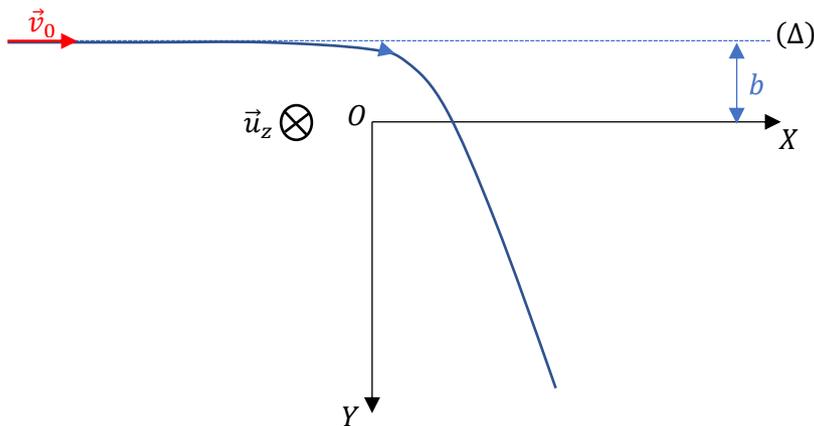
3)-f- A.N. : $\Delta E_m(\text{Baïkonour}) = \Delta E_m(\text{Cap Canaveral}) = 2,12 \cdot 10^{11} \text{ J}$

Avec 3 CS, l'énergie de satellisation est la même depuis les 3 bases de lancements. Il faut 4 CS pour observer une différence entre ces 3 bases. Pour la base de Kourou, l'énergie cinétique initiale représente 3/1000 de l'énergie de satellisation.



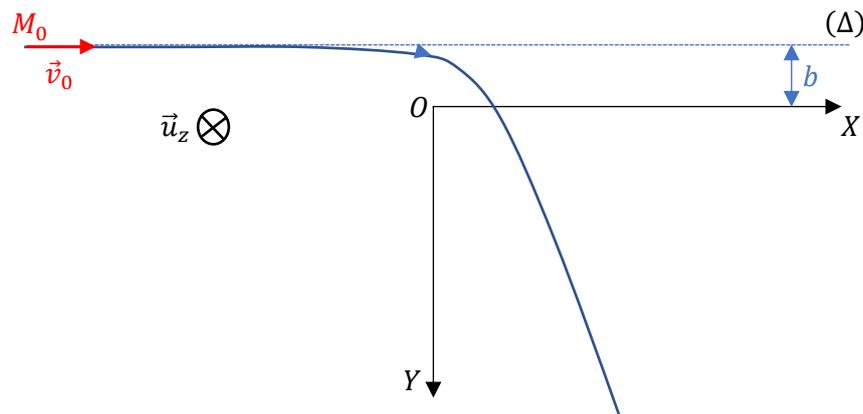
V-2) Caractéristique d'une météorite

On repère une météorite très éloignée du Soleil et on mesure sa vitesse \vec{v}_0 . On observe que $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{u}_x$ est portée par une droite Δ qui est située à une distance b du centre O du Soleil. On suppose qu'à l'instant où on la repère (instant initial), la météorite est si éloignée que son énergie potentielle d'interaction gravitationnelle avec le Soleil est négligeable. On note m la masse du météorite, M_S celle du Soleil, R_S le rayon du Soleil et G la constante gravitationnelle.



- 1) Montrer que l'énergie mécanique de la météorite est une intégrale première du mouvement. Déterminer sa valeur initiale.
 - 2) Montrer que le moment cinétique par rapport O de la météorite est une intégrale première du mouvement. Déterminer sa valeur initiale.
 - 3) Rappeler les conséquences de la conservation du moment cinétique.
 - 4) Définir les coordonnées polaires adaptées et établir l'expression du moment cinétique à un instant t quelconque.
 - 5) Etablir l'expression de l'énergie potentielle effective.
 - 6) Exprimer cette énergie potentielle effective en fonction de m , v_0 , b , du produit $G \cdot M_S$ et du rayon polaire r .
 - 7) Tracer l'allure de la courbe d'énergie potentielle effective et en déduire la nature bornée ou non de la trajectoire de la météorite.
 - 8) Déterminer la distance minimale d'approche r_{min} en fonction de v_0 , b et du produit $G \cdot M_S$.
 - 9) A quelle condition sur r_{min} la météorite n'ira pas toucher la surface du Soleil ?
- Données : constante gravitationnelle $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
 masse du Soleil $M_S = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

Corrigé :



- 1) On assimile la météorite à un point matériel M de masse m observé dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen. Dans cette étude, nous ferons l'hypothèse que M n'est soumis qu'à la force gravitationnelle exercée par le Soleil. Cette force est conservative donc :

$$dE_m(M) = \delta w^{nc} = 0$$

On en déduit que l'énergie mécanique de la météorite est constante : $E_m(M) = \text{cte}$. En explicitant :

$$E_m(M) = \frac{1}{2}m \cdot v^2(M) - \frac{G \cdot m \cdot M_S}{r} = \text{cte}$$

La valeur de $E_m(M)$ est fixée par les conditions initiales. Loin du Soleil, en négligeant l'énergie potentielle de gravitation ($r \rightarrow \infty$) devant l'énergie cinétique :

$$E_m(M) = \frac{1}{2}m \cdot v_0^2$$

On vérifie que l'énergie mécanique est positive donc la trajectoire de M est hyperbolique (état libre).

2) Appliquons le théorème du moment cinétique à M par rapport à O dans le référentiel héliocentrique :

$$\frac{d\vec{L}(O)}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Avec $\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{u}_r$ et $\vec{F} = -\frac{G \cdot m \cdot M_S}{r^2} \vec{u}_r$:

$$\frac{d\vec{L}(O)}{dt} = \vec{0}$$

Donc le moment cinétique de M par rapport à O est une constante vectorielle : $\vec{L}(O) = \overrightarrow{cté}$. La valeur de cette constante est fixée par les conditions initiales : déterminons $\vec{L}(O)$ loin du Soleil...

$$\vec{L}(O) = \overrightarrow{OM}_0 \wedge m \cdot \vec{v}_0$$

Posons $\overrightarrow{OM}_0 = X \cdot \vec{u}_x - b \cdot \vec{u}_y$ (avec $X \rightarrow -\infty$) et $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{u}_x$:

$$\vec{L}(O) = m \cdot \begin{pmatrix} X \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m \cdot v_0 \cdot b \cdot \vec{u}_z$$

On établit ainsi que :

$$\vec{L}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v}(M) = m \cdot v_0 \cdot b \cdot \vec{u}_z$$

3) Le moment cinétique est une constante vectorielle : $\vec{L}(O) = \overrightarrow{cté}$. On en déduit que le point matériel M décrit une trajectoire plane. Le plan du mouvement (fixé par les conditions initiales) passe par le centre de force O .

4) Dans la base de coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{u}_r \\ \vec{v}(M) = \dot{r} \cdot \vec{u}_r + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta \end{cases}$$

En explicitant :

$$\vec{L}(O) = m \cdot \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \cdot \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_z$$

On constate que : $m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta} = \text{cte}$ (avec $m = \text{cte}$; $r^2 \cdot \dot{\theta} = \text{cte}$ le système satisfait la loi des aires). Explicitons la constante :

$$r^2 \cdot \dot{\theta} = v_0 \cdot b = \text{cte}$$

Rq. : On vérifie que $r^2 \cdot \dot{\theta} = v_0 \cdot b > 0$ donc $\dot{\theta} > 0$ ce qui est en accord avec l'énoncé.

5 et 6) Explicitons l'énergie mécanique de M dans le référentiel héliocentrique :

$$E_m(M) = \frac{1}{2} m \cdot v^2(M) - \frac{G \cdot m \cdot M_S}{r}$$

Avec $\vec{v}(M) = \dot{r} \cdot \vec{u}_r + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$:

$$E_m(M) = \frac{1}{2} m \cdot (\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\theta}^2) - \frac{G \cdot m \cdot M_S}{r}$$

Sachant que $r^2 \cdot \dot{\theta} = v_0 \cdot b$, explicitons $\dot{\theta}$ en fonction de r , v_0 et b :

$$E_m(M) = \frac{1}{2} m \cdot \left(\dot{r}^2 + \frac{v_0^2 \cdot b^2}{r^2} \right) - \frac{G \cdot m \cdot M_S}{r}$$

On constate que l'énergie mécanique est la somme d'une fonction de \dot{r} et d'une fonction de la variable r qui, par définition, est la fonction énergie potentielle effective :

$$E_m(M) = \frac{1}{2} m \cdot \dot{r}^2 + E_{\text{Peff}}(r)$$

Avec :

$$E_{\text{Peff}}(r) = \frac{1}{2} m \cdot \left(\frac{v_0^2 \cdot b^2}{r^2} \right) - \frac{G \cdot m \cdot M_S}{r}$$

7) Allure de la fonction énergie potentielle effective :

$$\text{Pour } r \rightarrow 0 : E_{\text{Peff}}(r) \rightarrow \frac{1}{2} m \cdot \left(\frac{v_0^2 \cdot b^2}{r^2} \right) \rightarrow \infty$$

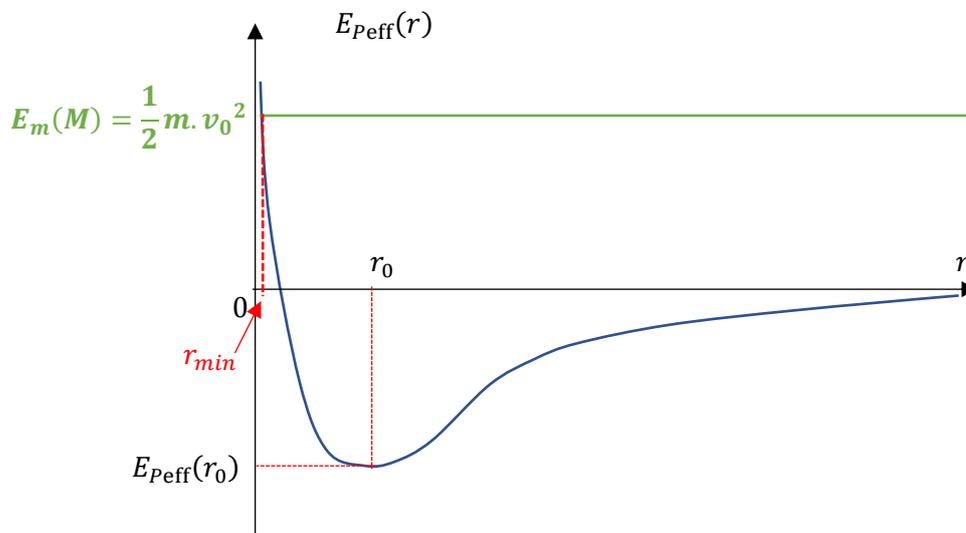
$$\text{Pour } r \rightarrow \infty : E_{\text{Peff}}(r) \rightarrow -\frac{G \cdot m \cdot M_S}{r} \rightarrow 0^-$$

La fonction admet donc (au moins) un extrémum pour $\frac{dE_{\text{Peff}}(r)}{dr} = 0$. En explicitant :

$$\frac{dE_{\text{Peff}}(r)}{dr} = -m \cdot \left(\frac{v_0^2 \cdot b^2}{r^3} \right) + \frac{G \cdot m \cdot M_S}{r^2}$$

$$\frac{dE_{\text{Peff}}(r)}{dr} = 0 \text{ pour } r = r_{\text{min}} = \frac{v_0^2 \cdot b^2}{G \cdot M_S}$$

Allure de la fonction $E_{\text{Peff}}(r)$:



Avec $E_m(M) = \frac{1}{2}m \cdot \dot{r}^2 + E_{\text{Peff}}(r)$:

$$\frac{1}{2}m \cdot \dot{r}^2 = E_m(M) - E_{\text{Peff}}(r) > 0$$

Avec $E_m(M) = \frac{1}{2}m \cdot v_0^2 > 0$ on vérifie que le système est dans un état libre $r \in [r_{\min}, \infty[$

8) Pour $r = r_{\min}$: car $\dot{r} = 0$ et $E_m(M) = E_{\text{Peff}}(r_{\min})$. Explicitons :

$$E_m(M) = E_{\text{Peff}}(r_{\min}) = \frac{1}{2}m \cdot \left(\frac{v_0^2 \cdot b^2}{r_{\min}^2} \right) - \frac{G \cdot m \cdot M_S}{r_{\min}} = \frac{1}{2}m \cdot v_0^2$$

On établit le polynôme du second ordre dont r_{\min} est solution :

$$r_{\min}^2 + \frac{2 \cdot G \cdot M_S}{v_0^2} r_{\min} - b^2 = 0$$

Discriminant :

$$\Delta = \left(\frac{2 \cdot G \cdot M_S}{v_0^2} \right)^2 + 4 \cdot b^2 > 0$$

Dont les solutions sont :

$$\begin{cases} r_{\min+} = -\frac{G \cdot M_S}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{G \cdot M_S}{v_0^2}\right)^2 + b^2} \\ r_{\min-} = -\frac{G \cdot M_S}{v_0^2} - \sqrt{\left(\frac{G \cdot M_S}{v_0^2}\right)^2 + b^2} \end{cases}$$

En notant que seule $r_{\min+} > 0$: la distance minimale d'approche est :

$$r_{\min} = -\frac{G \cdot M_S}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{G \cdot M_S}{v_0^2}\right)^2 + b^2}$$

9) La météorite ne percute pas le Soleil si la distance minimale d'approche est supérieure au rayon du Soleil : $r_{\min} > R_S$.