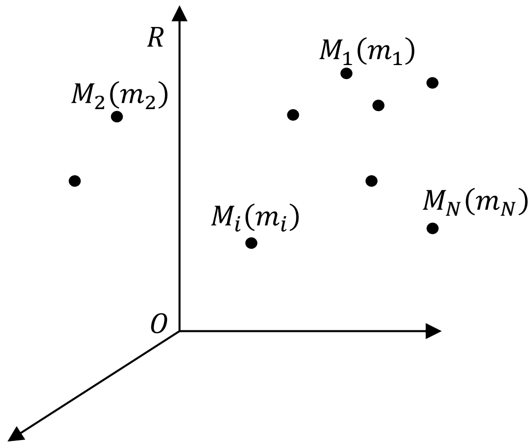
Chap. VII : Systèmes de points, grandeurs cinétiques et théorèmes généraux.

Introduction : Dans ce chapitre, notre objectif est de généraliser l'étude de la mécanique du point à des systèmes de points.

I: Grandeurs cinétiques

1) Présentation
Considérons un système de N points matériels observés dans un référentiel R :



On note $\vec{r}_i = \overrightarrow{OM_i}$ le vecteur position du point M_i et $\vec{v}_i = \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)_R$ son vecteur vitesse. Soit S le système composé de l'ensemble des N points matériels observés dans un référentiel R :

$$S = \{M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_N\}$$

Déterminons les grandeurs cinétiques de S dans R :

- la résultante cinétique (ou quantité de mouvement) : $\vec{p}(S)_R$
- le moment cinétique : $\vec{L}_S(O)_R$
- l'énergie cinétique : $E_C(S)_R$

mais au préalable, définissons le centre d'inertie G du système.

2) Centre d'inertie (ou de gravité) d'un système
-a- Système de 2 points matériels :
Considérons un système de 2 points matériels $S = \{M_1, M_2\}$. Par définition, le centre d'inertie de S noté G est donné par :

$$\boxed{m_1.\overrightarrow{OM_1} + m_2.\overrightarrow{OM_2} = (m_1 + m_2).\overrightarrow{OG} = m_T.\overrightarrow{OG}}$$

en notant $m_T = m_1 + m_2$ la masse totale du système.
Explicitons $\overrightarrow{GM_1}$ et $\overrightarrow{GM_2}$:

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_1}$$
$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_2}$$

$$m_1.\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GM_1}\right)+m_2.\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GM_2}\right)=(m_1+m_2).\overrightarrow{OG}$$

Ce qui nous conduit à :

$$\boxed{m_1.\overrightarrow{GM_1}+m_2.\overrightarrow{GM_2}=\vec{0}}$$

Posons $\vec{r}=\overrightarrow{M_1M_2}$ et explicitons $\overrightarrow{GM_1}$ et $\overrightarrow{GM_2}$ en fonction de $\vec{r}$:

$$\vec{r}=\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1G}+\overrightarrow{GM_2}=-\overrightarrow{GM_1}+\overrightarrow{GM_2}=-\overrightarrow{GM_1}-\frac{m_1}{m_2}\overrightarrow{GM_1}=-\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right).\overrightarrow{GM_1}$$

On établit ainsi que :

$$\overrightarrow{GM_1}=-\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{M_1M_2}$$
$$\overrightarrow{GM_2}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{M_1M_2}$$

Illustration :

- Pour $m_1=m_2$ on vérifie que $\left\|\overrightarrow{GM_1}\right\|=\left\|\overrightarrow{GM_2}\right\|=\frac{r}{2}$
- Pour $m_1>m_2$, $\left\|\overrightarrow{GM_2}\right\|>\left\|\overrightarrow{GM_1}\right\|$.
- Pour $m_1\gg m_2$, $\left\|\overrightarrow{GM_2}\right\|\gg\left\|\overrightarrow{GM_1}\right\|$.
- Pour $\frac{m_1}{m_2}\to\infty$: on peut assimiler M_1 à G.

-b- Système de N points matériels :

Considérons un système S composé de N points matériels : $S=\{M_1,M_2,\ldots,M_i,\ldots,M_N\}$. En généralisant la définition précédente, on peut définir le centre de gravité G de S :

$$\sum_{i=1}^{N} m_i.\overrightarrow{OM_i}=m_T.\overrightarrow{OG}$$
$$\sum_{i=1}^{N} m_i.\overrightarrow{GM_i}=\vec{0}$$

3) Résultante cinétique

La quantité de mouvement de $S=\{M_1,M_2,\ldots,M_i,\ldots,M_N\}$ est égale à la somme des quantités de mouvement de chacun des points qui composent le système :

$$\vec{p}(S)_R=\sum_{i=1}^{N} m_i.\vec{v}_i=\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i$$

Avec $\sum_{i=1}^{N} m_i.\overrightarrow{OM_i}=m_T.\overrightarrow{OG}$, en dérivant par rapport au temps :

$$\sum_{i=1}^{N} m_i.\left(\frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt}\right)_R = \sum_{i=1}^{N} m_i.\vec{v}_i = m_T.\left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_R = m_T.\vec{v}(G)_R$$

Ainsi, la résultante cinétique du système $S = \{M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_N\}$ est donnée par :

$$\boxed{\vec{p}(S)_R = m_T.\vec{v}(G)_R}$$

avec $m_T = \sum_{i=1}^{N} m_i$ masse totale du système.

4) Moment cinétique

Soit $\vec{L}_S(O)_R$ le moment cinétique du système $S = \{M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_N\}$ par rapport à O dans R. Notons $\vec{L}_i(O)_R$ le moment cinétique du point matériel M_i par rapport à O dans R :

$$\vec{L}_i(O)_R = \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i.\vec{v}_i$$

Le moment cinétique de S par rapport à O dans R est la somme des moments des points matériels M_i par rapport à O dans R :

$$\vec{L}_S(O)_R = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i(O)_R = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i.\vec{v}_i$$

5) Energie cinétique

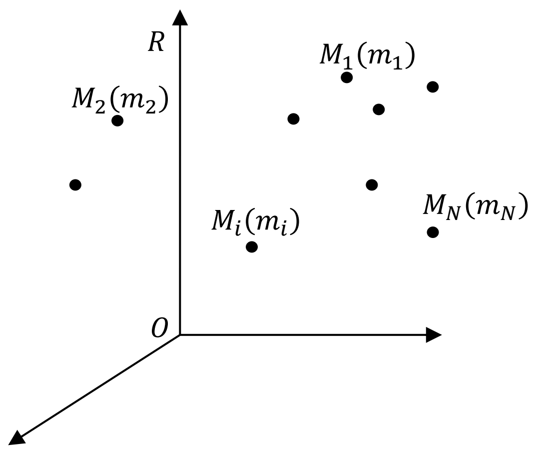
Soit $E_C(S)_R$ l'énergie cinétique du système $S = \{M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_N\}$ dans R et $E_{Ci} = \frac{1}{2} m_i.{v_i}^2$ l'énergie cinétique du point matériel M_i dans ce référentiel. L'énergie cinétique de S dans R est la somme des énergie cinétiques des points matériels qui composent le système :

$$E_C(S)_R = \sum_{i=1}^{N} E_{Ci} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i.{v_i}^2$$

II: Théorèmes généraux

1) Présentation

Supposons que le système $S = \{M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_N\}$ soit observé dans un référentiel R galiléen.



Que deviennent les théorèmes généraux de la mécanique :

- le principe fondamental de la dynamique
- le théorème du moment cinétique
- le théorème de l'énergie cinétique (et théorèmes associés)

pour le système de points $S = \{M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_N\}$?

2) Théorème de la résultante cinétique

Supposons que le point matériel M_i de quantité de mouvement $\vec{p}_i = m_i.\vec{v}_i$ soit soumis à l'action de forces intérieures (action des points matériels $M_{j\neq i}$ de S sur M_i) et extérieures dans le référentiel R galiléen. Appliquons le principe fondamental de la dynamique au point matériel M_i dans R :

$$\left(\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right)_R = \vec{F}_{int\to i} + \vec{F}_{ext\to i}$$

avec :

- $\vec{F}_{int\to i}$: résultante des forces intérieures sur M_i
- $\vec{F}_{ext\to i}$ résultante des forces extérieures sur M_i

Sachant que $\vec{p}(S)_R = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = m_T.\vec{v}(G)_R$:

$$\left(\frac{d\vec{p}(S)_R}{dt}\right)_R = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right)_R = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{int\to i} + \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{ext\to i}$$

Principe des actions mutuelles :

Le principe des actions mutuelles postule que si un point matériel M_i exerce une force $\vec{F}_{i\to j}$ sur un point matériel $M_{j\neq i}$ alors le point M_j exerce une force opposée sur M_i :

$$\vec{F}_{j\to i} = -\vec{F}_{i\to j}$$
$$\vec{F}_{i\to j} + \vec{F}_{j\to i} = \vec{0}$$

En sommant les forces intérieures par couple de forces, on établit ainsi que la résultante des forces intérieures au système $S = \{M_1, M_2, \dots., M_i, \dots., M_N\}$ est nulle :

$$\vec{F}_{int} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{int\to i} = \vec{0}$$

Ainsi :

$$\left(\frac{d\vec{p}(S)_R}{dt}\right)_R = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{ext\to i}$$

Sachant que $\vec{p}(S)_R = m_T.\vec{v}(G)_R$:

$$\left(\frac{d\vec{p}(S)_R}{dt}\right)_R = m_T.\vec{a}(G)_R$$

Notons $\vec{F}_{ext}$ la résultante des forces extérieures sur le système :

$$\vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{ext\to i}$$

On établit le théorème de la résultante cinétique :

$$\boxed{m_T.\vec{a}(G)_R = \vec{F}_{ext}}$$

avec $m_T = \sum_{i=1}^{N} m_i$ masse totale du système $S = \{M_1, M_2, \dots., M_i, \dots., M_N\}$.

3) Théorème du moment cinétique

Soit $\vec{L}_i(O)_R = \overrightarrow{OM_\iota}\,\Lambda\, m_i.\vec{v}_i$ le moment cinétique de M_i par rapport à rapport à O dans R galiléen. Appliquons le théorème du moment cinétique à M_i :

$$\left(\frac{d\vec{L}_i(O)_R}{dt}\right)_R = \overrightarrow{OM_\iota}\Lambda\left(\vec{F}_{int\to i} + \vec{F}_{ext\to i}\right) = \overrightarrow{OM_\iota}\,\Lambda\,\vec{F}_{int\to i} + \overrightarrow{OM_\iota}\,\Lambda\,\vec{F}_{ext\to i}$$

Sachant que :

$$\vec{L}_S(O)_R = \sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i(O)_R = \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{OM_\iota}\,\Lambda\, m_i.\vec{v}_i$$

appliquons le théorème du moment cinétique au système $S = \{M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_N\}$ par rapport à O dans R galiléen :

$$\left(\frac{d\vec{L}_S(O)_R}{dt}\right)_R = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\vec{L}_i(O)_R}{dt}\right)_R = \sum_{i=1}^{N}\left(\overrightarrow{OM_\iota}\,\Lambda\,\vec{F}_{int\to i} + \overrightarrow{OM_\iota}\,\Lambda\,\vec{F}_{ext\to i}\right)$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_S(O)_R}{dt}\right)_R = \sum \vec{M}(O)_{\vec{F}_{int}} + \sum \vec{M}(O)_{\vec{F}_{ext}}$$

Exprimons le moment par rapport à O de la force $\vec{F}_{j\to i}$ intérieure exercée par le point matériel $M_{j\neq i}$ sur le point M_i :

$$\vec{M}_{j\to i}(O) = \overrightarrow{OM_\iota}\,\Lambda\,\vec{F}_{j\to i}$$

De la même manière, exprimons le moment par rapport à O de la force $\vec{F}_{i\to j}$ exercée par le point matériel M_i sur le point M_j :

$$\vec{M}_{i\to j}(O) = \overrightarrow{OM_J}\,\Lambda\,\vec{F}_{i\to j}$$

Le moment résultant est :

$$\vec{M}_{i+j}(O) = \vec{M}_{j\to i}(O) + \vec{M}_{i\to j}(O) = \overrightarrow{OM_\iota}\,\Lambda\,\vec{F}_{j\to i} + \overrightarrow{OM_J}\,\Lambda\,\vec{F}_{i\to j}$$

Sachant que $\vec{F}_{j\to i} = -\vec{F}_{i\to j}$ par application du principe des actions mutuelles :

$$\vec{M}_{i+j}(O) = \left(\overrightarrow{OM_J} - \overrightarrow{OM_\iota}\right)\Lambda\,\vec{F}_{i\to j} = \overrightarrow{M_\iota M_J}\,\Lambda\,\vec{F}_{i\to j}$$

M_i et M_j étant des points matériels, la force $\vec{F}_{i\to j}$ est colinéaire à $\overrightarrow{M_\iota M_J}$ et $\vec{M}_{i+j}(O) = \vec{0}$.

En sommant les moments des forces intérieures par couple, on établit que :

$$\sum \vec{M}(O)_{\vec{F}_{int}} = \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{OM_\iota}\Lambda\vec{F}_{int\to i} = \vec{0}$$

On établit ainsi le théorème du moment cinétique appliqué à $S = \{M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_N\}$ par rapport à O dans R galiléen :

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{L}_S(O)_R}{dt}\right)_R = \sum \vec{M}(O)_{\vec{F}_{ext}}}$$

4) Théorème de l'énergie cinétique (et théorèmes associés)

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à M_i dans R galiléen :

$$dE_{Ci} = \vec{F}_{int\to i}.d\vec{r}_i + \vec{F}_{ext\to i}.d\vec{r}_i = \delta w_{int\to i} + \delta w_{ext\to i}$$

Sachant que :

$$E_C(S)_R = \sum_{i=1}^{N} E_{Ci} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i.v_i^2$$

on établit le théorème de l'énergie cinétique pour le système $S = \{M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_N\}$ dans R galiléen :

$$\boxed{dE_C(S)_R = \delta w_{int} + \delta w_{ext}}$$

avec :

- $\delta w_{int} = \sum_{i=1}^{N} \delta w_{int\to i}$: travail élémentaire résultant des forces intérieures
- $\delta w_{ext} = \sum_{i=1}^{N} \delta w_{ext\to i}$: travail élémentaire résultant des forces extérieures

Remarques : on peut noter $\vec{F}_{j\to i} = -\vec{F}_{i\to j}$ n'implique pas la nullité du travail des forces intérieures. En effet : $\delta w_{i+j} = \vec{F}_{i\to j}.d\overrightarrow{OM_j} + \vec{F}_{j\to i}.d\overrightarrow{OM_i} = \vec{F}_{i\to j}.d\overrightarrow{M_iM_j}$. En coordonnées sphériques, posons $\vec{F}_{i\to j} = F(r).\vec{u}_r$ et $d\overrightarrow{M_iM_j} = d\vec{r} = dr.\vec{u}_r$:

$$\delta w_{i+j} = F(r).dr \neq 0 \quad \text{donc} \quad \delta w_{int} \neq 0$$

Le travail des forces intérieures est nul ($\delta w_{int} = 0$) si le système est **indéformable**

Théorèmes associés :

- Théorème de la puissance cinétique :

$$\left(\frac{dE_C(S)_R}{dt}\right)_R = P_{int} + P_{ext}$$

- Théorème de l'énergie mécanique :

  Dans le bilan des forces intérieures et extérieures, distinguons les forces conservatives des forces non conservatives :

$$\delta w_{int} = \delta w_{int}{}^C + \delta w_{int}{}^{NC}$$
$$\delta w_{ext} = \delta w_{ext}{}^C + \delta w_{ext}{}^{NC}$$

  Par définition :

$$\delta w_{int}{}^C = -dE_{Pint} \quad \text{et} \quad \delta w_{ext}{}^C = -dE_{Pext}$$

  Soit $E_m(S)_R$ l'énergie mécanique du système $S = \{M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_N\}$ dans R galiléen. Par définition :

$$\boxed{E_m(S)_R = E_C(S)_R + E_{Ptot}}$$

  avec $E_{Ptot} = E_{Pint} + E_{Pext}$: énergie potentielle totale du système. A partir de ces relations, on établit le théorème de l'énergie mécanique :

$$\boxed{dE_m(S)_R = \delta w_{int}{}^{NC} + \delta w_{ext}{}^{NC}}$$

- Théorème de la puissance mécanique :

$$\boxed{\left(\frac{dE_m(S)_R}{dt}\right)_R = P_{int}{}^{NC} + P_{ext}{}^{NC}}$$

- Intégrale première de l'énergie cinétique :
Si le système $S = \{M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_N\}$ n'est soumis qu'à des forces conservatives, ou s'il est soumis à des forces non conservatives qui ne travaillent pas ($\delta w_{int}{}^{NC} + \delta w_{ext}{}^{NC} = 0$) alors l'énergie mécanique du système est constante :

$$\boxed{dE_m(S)_R = 0 \quad \text{donc} \quad E_m(S)_R = cte}$$

Synthèse

Soit $S = \{M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_N\}$ un système de points matériels.

- Le centre d'inertie de S, noté G est défini par : $\sum_{i=1}^{N} m_i.\overrightarrow{OM_i} = m_T.\overrightarrow{OG}$ ou $\sum_{i=1}^{N} m_i.\overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$.
- Résultante cinétique : $\vec{p}(S)_R = \sum_{i=1}^{N} m_i.\vec{v}_i = m_T.\vec{v}(G)_R$
- Théorème de la résultante cinétique : $m_T.\vec{a}(G)_R = \vec{F}_{ext}$
- Théorème du moment cinétique : $\left(\frac{d\vec{L}_S(O)_R}{dt}\right)_R = \sum \vec{M}(O)_{\vec{F}_{ext}}$
- Théorème de l'énergie cinétique : $dE_C(S)_R = \delta w_{int} + \delta w_{ext}$
- Théorème de la puissance cinétique : $\left(\frac{dE_C(S)_R}{dt}\right)_R = P_{int} + P_{ext}$

Soit $E_m(S)_R$ l'énergie mécanique de S dans R: $E_m(S)_R = E_C(S)_R + E_{P\,tot}$ avec $E_{P\,tot} = E_{Pint} + E_{Pext}$: énergie potentielle totale du système :

- Théorème de l'énergie mécanique : $dE_m(S)_R = \delta w_{int}{}^{NC} + \delta w_{ext}{}^{NC}$
- Intégrale première de l'énergie cinétique : si $\delta w_{int}{}^{NC} + \delta w_{ext}{}^{NC} = 0$ alors $E_m(S)_R = cte$