

## Chap VIII : Solide en rotation autour d'un axe fixe

**Introduction :** Dans ce chapitre, nous allons étudier le mouvement d'un solide  $S$  en rotation autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ) dans le référentiel d'étude  $R$  supposé galiléen. Pour cela, nous partirons des théorèmes généraux (établis dans le chapitre précédent) que nous appliquerons dans un premier temps aux solides, puis aux solides en rotation autour d'un axe fixe. Nous finirons ce chapitre par une application des théorèmes généraux aux systèmes déformables.

### I : Théorèmes généraux

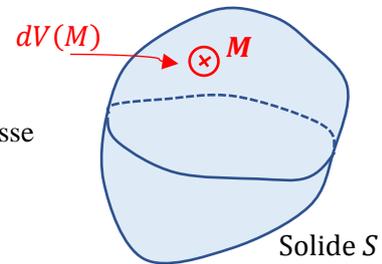
#### 1) Définition

A l'échelle macroscopique, un solide est décrit comme un milieu **continu et indéformable**. Considérons un solide  $S$  de volume  $V$  et de masse  $m$ . Soit  $M$  un point quelconque de  $S$  au voisinage duquel on définit un volume élémentaire  $dV(M)$  de masse élémentaire  $dm(M)$ . La masse volumique au voisinage du point  $M$  est donnée par :

$$\rho(M) = \frac{dm(M)}{dV(M)}$$

On peut exprimer la masse du solide  $S$  en fonction de sa masse volumique :

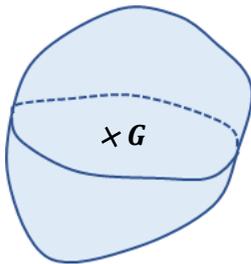
$$m = \iiint dm(M) = \iiint \rho(M) \cdot dV(M)$$



Ce formalisme qui consiste à exprimer la masse de  $S$  en fonction d'une intégrale triple est délicat et nécessiterait quelques compléments mathématiques. Dans la suite, nous adopterons la notation discrète (empruntée aux systèmes de points) qui consiste à poser que :

$$m = \sum_i dm_i$$

#### 2) Résultante cinétique d'un solide



Considérons un solide  $S$  de masse  $m$ . On note  $G$  son centre de d'inertie défini par :

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot \overrightarrow{OM_i} = m \cdot \overrightarrow{OG}$$

ou, ce qui est équivalent :

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

La résultante cinétique de  $S$  dans un référentiel  $R$ , notée  $\vec{p}(S)_R$  est définie par :

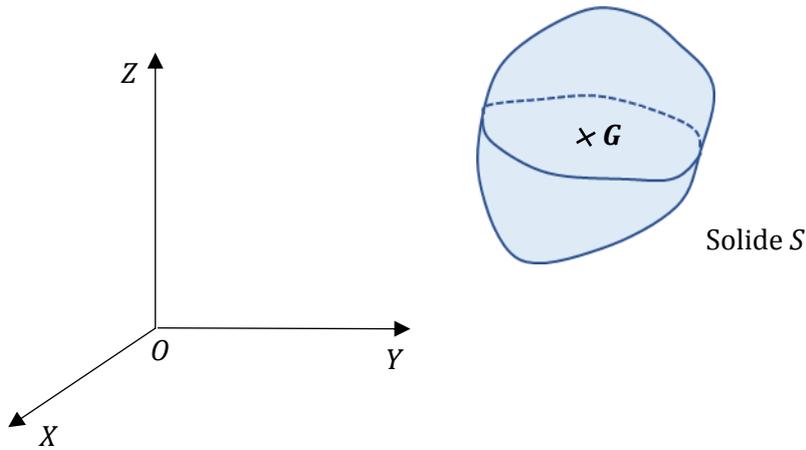
$$\vec{p}(S)_R = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}_i$$

Soit (cf chap. VI, I-3) :

$$\vec{p}(S)_R = m \cdot \vec{v}(G)_R$$

Dans le chapitre précédent, nous avons établi les théorèmes généraux pour les systèmes de points. Que deviennent ces théorèmes généraux pour un solide qui, par définition, est un système indéformable ?

### 3) Théorème généraux de la mécanique du solide



Supposons que le solide  $S$  soit soumis à la résultante  $\vec{F}_{ext}$  des forces extérieures dans le référentiel  $R$  supposé galiléen.

Le théorème de la résultante cinétique a pour expression :

$$m \cdot \vec{a}(G)_R = \vec{F}_{ext}$$

avec  $\vec{p}(S)_R = m \cdot \vec{v}(G)_R$

Le théorème du moment cinétique est donné par :

$$\left( \frac{d\vec{L}_S(O)_R}{dt} \right)_R = \sum \vec{M}(O)_{\vec{F}_{ext}}$$

Sachant qu'un solide est indéformable, le travail des forces intérieures au solide est nul ( $\delta w_{int} = 0$ ). Les théorèmes énergétiques se ramènent alors à :

Théorème de l'énergie cinétique :  $dE_C(S)_R = \delta w_{ext}$

Théorème de la puissance cinétique :  $\left( \frac{dE_C(S)_R}{dt} \right)_R = P_{ext}$

Théorème de l'énergie mécanique :  $dE_m(S)_R = \delta w_{ext}^{NC}$

Intégrale première de l'énergie cinétique : si  $\delta w_{ext}^{NC} = 0$  alors  $E_m(S)_R = cte$ .

Avec  $E_m(S)_R$  l'énergie mécanique du solide  $S$  dans  $R$  :  $E_m(S)_R = E_C(S)_R + E_{Ptot}$   
 et  $E_{Ptot} = E_{Pint} + E_{Pext}$  : énergie potentielle totale du système.

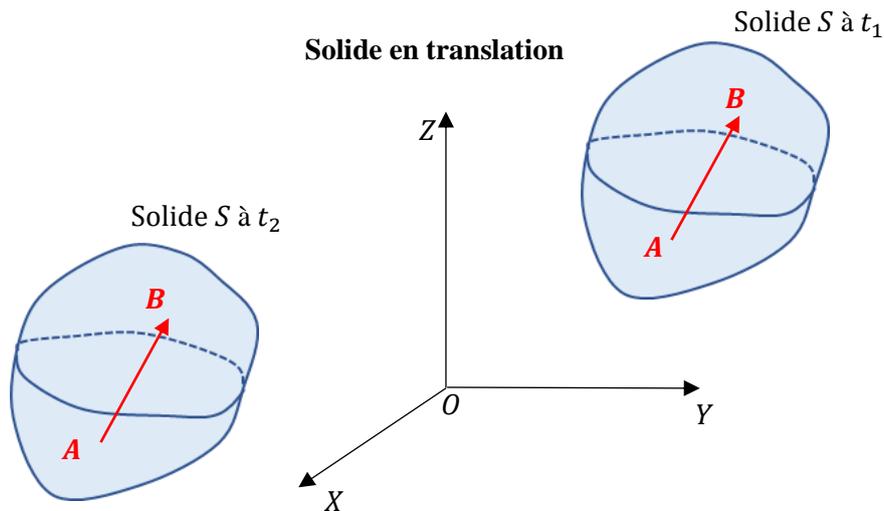
### 4) Mouvements d'un solide

#### -a- Solide en translation

Un solide  $S$  est en **translation** dans un référentiel  $R$  si le vecteur rotation instantanée de  $S$  dans  $R$  est nul :

$$\vec{\omega}_{S/R} = \vec{0}$$

Soit  $A$  et  $B$  deux points quelconques de  $S$ . Si  $S$  est en translation dans  $R$  alors le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  reste colinéaire à lui-même au cours du temps :

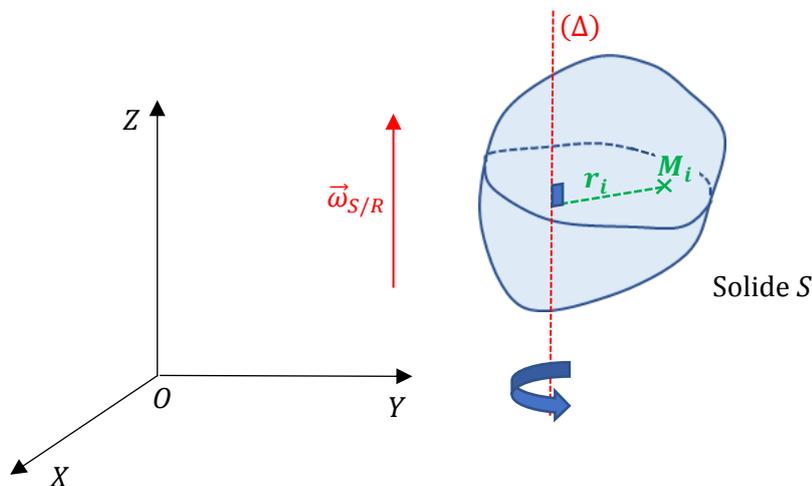


On peut définir différents types de translations. Exemples : translation rectiligne (mouvement d'un train dans une gare) et translation circulaire (mouvement d'une nacelle sur une grande roue).

-b- Solide en rotation autour d'un axe fixe ( $\Delta$ )

**-b.1- Définition**

Soit ( $\Delta$ ) un axe fixe dans le référentiel  $R$ . On dit qu'un solide  $S$  est en rotation autour de l'axe fixe ( $\Delta$ ) si tous les points  $M_i$  de  $S$  décrivent une trajectoire circulaire de rayon  $r_i$  autour de ( $\Delta$ ) :



**-b.2- Moment d'inertie par rapport à l'axe ( $\Delta$ )**

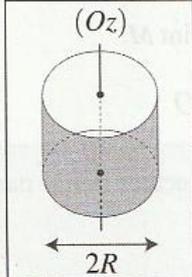
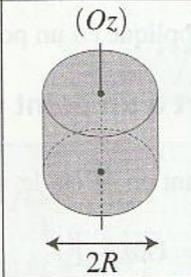
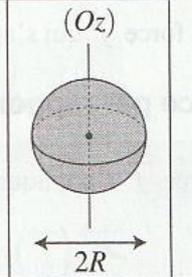
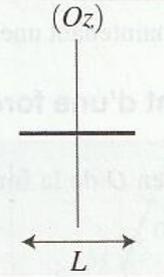
Considérons un solide  $S$  en rotation autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ) dans le référentiel  $R$ . On note  $J_\Delta$  le moment d'inertie de  $S$  par rapport à ( $\Delta$ ) défini par :

$$J_\Delta = \sum_{i=1}^N m_i \cdot r_i^2$$

Rq. : Notons que le moment d'inertie  $J_{\Delta i} = m_i \cdot r_i^2$  est égal au produit de la masse  $m_i$  par la distance  $r_i$  au carré. Par définition  $J_\Delta = \text{cte}$ . Parfois le moment d'inertie par rapport à ( $\Delta$ ) est également noté  $I_\Delta$ .

Homogénéité et unité :  $[J_\Delta] = M.L^2$  donc l'unité du moment d'inertie est le  $kg.m^2$  dans le système d'unité international.

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe  $J_\Delta$  peut se calculer... mais ce n'est pas au programme. Il s'exprime en fonction des grandeurs caractéristiques du solide. Exemples :

cylindre vide de rayon $R$	cylindre plein de rayon $R$	boule de rayon $R$	barre de longueur $L$
$mR^2$	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{1}{12}mL^2$
			

## II : Grandeurs cinétiques d'un solide $S$ en rotation autour d'un axe fixe

### 1) Présentation

Considérons un solide  $S$  en rotation autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ) dans le référentiel  $R$ . Exprimons le moment cinétique  $\vec{L}_S(O)_R$  et l'énergie cinétique  $E_C(S)_R$  de  $S$  dans  $R$  en fonction de son moment d'inertie  $J_\Delta$ .

### 2) Moment cinétique

Considérons un solide  $S$  en rotation autour d'un axe fixe dans le référentiel  $R$ . On note  $\vec{\omega}_{S/R} = \omega \cdot \vec{u}_z$  le vecteur rotation instantanée de  $S$  dans  $R$ . Exprimons le moment cinétique  $\vec{L}_S(O)_R$  du solide  $S$  par rapport au point  $O$  dans le référentiel  $R$  donné par :

$$\vec{L}_S(O)_R = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i(O)_R = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i \cdot \vec{v}_i$$

Explicitons le moment cinétique dans la base de coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM}_i = r_i \cdot \vec{u}_{r_i} \\ \vec{v}_i = r_i \cdot \omega \cdot \vec{u}_{\theta_i} \end{cases}$$

Soit :

$$\overrightarrow{OM}_i \wedge m_i \cdot \vec{v}_i = m_i \cdot \begin{pmatrix} r_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ r_i \cdot \omega \\ 0 \end{pmatrix} = m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega \cdot \vec{u}_z$$

On établit alors que :

$$\vec{L}_S(O)_R = \sum_{i=1}^N m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega \cdot \vec{u}_z = J_\Delta \cdot \vec{\omega}_{S/R}$$

Avec  $\vec{\omega}_{S/R} = \omega \cdot \vec{u}_z$  on note  $L_\Delta$  la projection du moment cinétique sur l'axe  $\vec{u}_z$  de rotation :

$$L_\Delta = \vec{L}_S(O)_R \cdot \vec{u}_z = J_\Delta \cdot \omega$$

On peut donc exprimer le moment cinétique du solide  $S$  en rotation autour de l'axe fixe ( $\Delta$ ) sous la forme :

$$\vec{L}_{S/\Delta} = J_{\Delta} \cdot \vec{\omega}_{S/R} = L_{\Delta} \cdot \vec{u}_z$$

avec  $L_{\Delta} = J_{\Delta} \cdot \omega$

## 3) Energie cinétique

Sachant que l'énergie cinétique de  $S$  dans le référentiel  $R$  est donnée par :

$$E_C(S)_R = \sum_{i=1}^N E_{Ci} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2$$

Exprimons  $E_C(S)_R$  du solide  $S$  en rotation autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ) en fonction de son moment d'inertie  $J_{\Delta}$  en posant que  $v_i = r_i \cdot \omega$  :

$$E_C(S)_R = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \cdot (r_i \cdot \omega)^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N m_i \cdot r_i^2 \right) \cdot \omega^2$$

Soit :

$$E_C(S)_R = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \omega^2$$

## 4) Bilan

Nous retiendrons les expressions du moment cinétique et de l'énergie cinétique d'un solide  $S$  en rotation autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ) en fonction du moment d'inertie  $J_{\Delta}$  :

Moment cinétique	Energie cinétique
$\vec{L}_{S/\Delta} = J_{\Delta} \cdot \vec{\omega}_{S/R} = L_{\Delta} \cdot \vec{u}_z$ <p style="text-align: center;">avec <math>L_{\Delta} = J_{\Delta} \cdot \omega</math></p>	$E_C(S)_R = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \omega^2$

### III : Théorème généraux pour un solide $S$ en rotation autour d'un axe fixe

## 1) Présentation

Nous avons établi les théorèmes généraux de la mécanique du solide en I.3. Que deviennent le théorème du moment cinétique et le théorème de la puissance cinétique pour un solide  $S$  en rotation autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ) ?

## 2) Théorème du moment cinétique

-a-Forme explicite

Nous savons que le théorème du moment cinétique appliqué à un solide à pour expression :

$$\left( \frac{d\vec{L}_S(O)_R}{dt} \right)_R = \sum \vec{M}(O)_{\vec{F}_{ext}}$$

Avec  $\vec{L}_S(O)_R = J_{\Delta} \cdot \vec{\omega}_{S/R}$  ce théorème peut s'exprimer sous la forme :

$$J_{\Delta} \cdot \left( \frac{d\vec{\omega}_{S/R}}{dt} \right)_R = \sum \vec{M}(O)_{\vec{F}_{ext}}$$

Sachant que  $\vec{\omega}_{S/R} = \omega \cdot \vec{u}_z$  on peut projeter cette relation sur l'axe de rotation  $\vec{u}_z$  :

$$J_{\Delta} \cdot \left( \frac{d\omega_{S/R}}{dt} \right)_R = \sum \vec{M}(O)_{\vec{F}_{ext}} \cdot \vec{u}_z$$

On note  $M_{F/\Delta}$  le moment de la force  $\vec{F}$  par rapport à l'axe  $(\Delta)$  défini par la projection :

$$M_{F/\Delta} = \vec{M}(O)_{\vec{F}_{ext}} \cdot \vec{u}_z$$

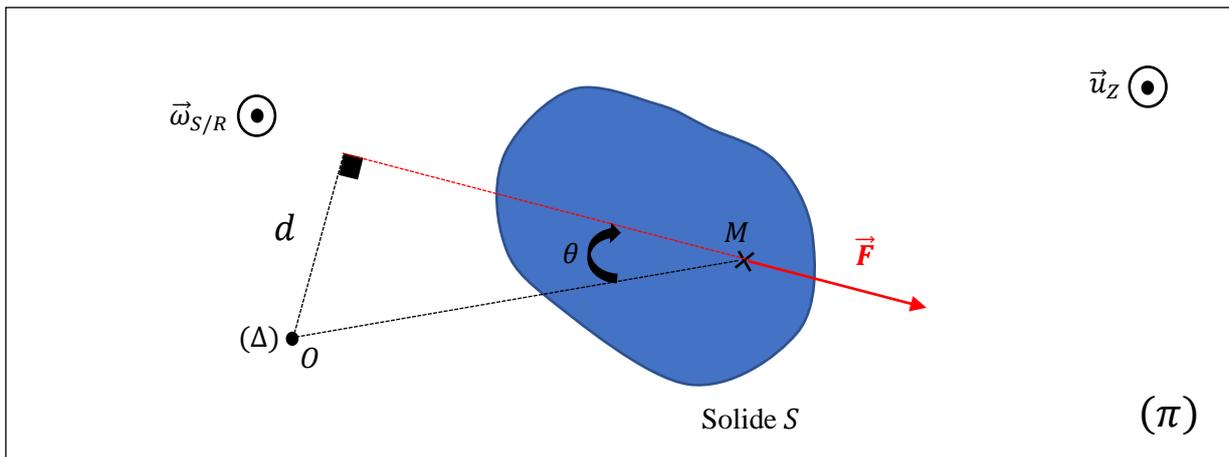
On exprime alors le théorème du moment cinétique sous la forme :

$$J_{\Delta} \cdot \left( \frac{d\omega_{S/R}}{dt} \right)_R = \sum M_{F/\Delta}$$

-b- Moment d'une force par rapport à un axe et bras de levier

Considérons un solide  $S$  soumis à l'action d'une force  $\vec{F}$  s'exerçant en un point  $M$ , en rotation autour d'un axe  $(\Delta)$  fixe dans  $R$ . Supposons que cette force soit orthogonale à l'axe  $(\Delta)$ . Avec  $\vec{\omega}_{S/R} = \omega \cdot \vec{u}_z$  explicitons le moment de la force  $\vec{F}$  par rapport  $(\Delta)$  :  $M_{F/\Delta} = \vec{M}(O)_{\vec{F}} \cdot \vec{u}_z$ .

#### Vue de dessus



Soit  $O$  un point fixe placé à un endroit quelconque sur l'axe  $(\Delta)$ . Pour simplifier, nous supposons dans un premier temps que le point  $O$  est dans le plan de la figure  $(\pi)$  :

$$\vec{M}(O)_{\vec{F}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \pm \|\vec{M}(O)_{\vec{F}}\| \cdot \vec{u}_z$$

Avec :

$$\|\vec{M}(O)_{\vec{F}}\| = \|\overrightarrow{OM}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot |\sin(\overrightarrow{OM}, \vec{F})| = \|\overrightarrow{OM}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot |\sin(\theta)|$$

Posons :  $d = \|\overrightarrow{OM}\| \cdot |\sin(\theta)|$ . On constate que :

$$\vec{M}(O)_{\vec{F}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \pm F \cdot d \cdot \vec{u}_z$$

On appelle « bras de levier » de la force  $\vec{F}$  la distance  $d$  définie par :

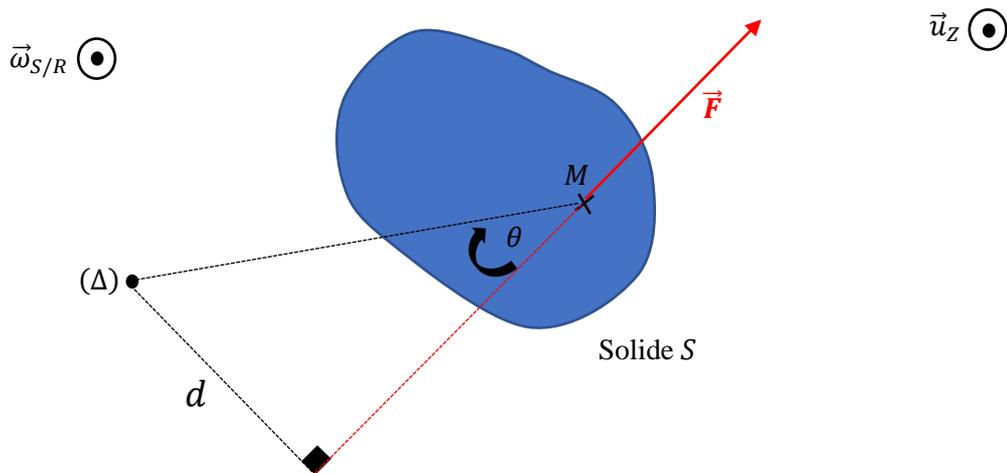
$$d = \|\overrightarrow{OM}\| \cdot |\sin(\theta)| : \text{ bras de levier}$$

Avec  $M_{F/\Delta} = \vec{M}(O)_{\vec{F}} \cdot \vec{u}_z$ , le moment de la force  $\vec{F}$  par rapport à  $(\Delta)$  se ramène à :

$$M_{F/\Delta} = \pm F \cdot d$$

- Si la force  $\vec{F}$  tend à faire tourner le solide  $S$  dans le sens de  $\vec{\omega}_{S/R}$  alors  $M_{F/\Delta} = + F \cdot d$ .
- Si la force  $\vec{F}$  tend à faire tourner le solide  $S$  dans le sens opposé à  $\vec{\omega}_{S/R}$  alors  $M_{F/\Delta} = - F \cdot d$ .

Sur la figure ci-dessus,  $M_{F/\Delta} = - F \cdot d$  car la force  $\vec{F}$  tend à faire tourner le solide  $S$  dans le sens opposé à  $\vec{\omega}_{S/R}$ . Sur la figure ci-dessous  $M_{F/\Delta} = + F \cdot d$  car la force  $\vec{F}$  tend à faire tourner le solide  $S$  dans le sens de  $\vec{\omega}_{S/R}$ .

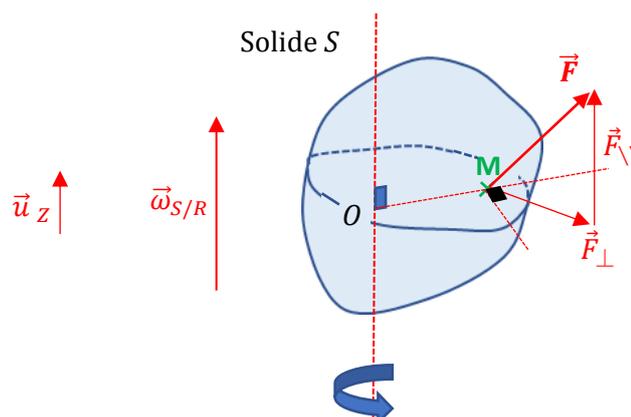


Rq. : Si le point  $O$  n'est pas dans le plan de la figure, on peut poser que :  $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$  avec  $O' \in (\pi)$ . Dans ce cas :  $\vec{M}(O)_{\vec{F}} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{OO'} \wedge \vec{F} + \vec{O'M} \wedge \vec{F}$  et  $M_{F/\Delta} = \vec{M}(O)_{\vec{F}} \cdot \vec{u}_z = (\vec{OO'} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_z + (\vec{O'M} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_z$ . Le premier vecteur étant orthogonal à  $\vec{u}_z$  on établit que :

$$M_{F/\Delta} = (\vec{O'M} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_z = \pm F \cdot d$$

Donc l'expression du moment d'une force par rapport à l'axe  $M_{F/\Delta} = \pm F \cdot d$  est vérifiée quelle que soit la position du point  $O$  sur l'axe de rotation.

Supposons désormais que la force  $\vec{F}$  ne soit pas orthogonale à l'axe  $(\Delta)$ . Que peut-on dire du moment de cette force par rapport à l'axe de rotation  $M_{F/\Delta}$  ?



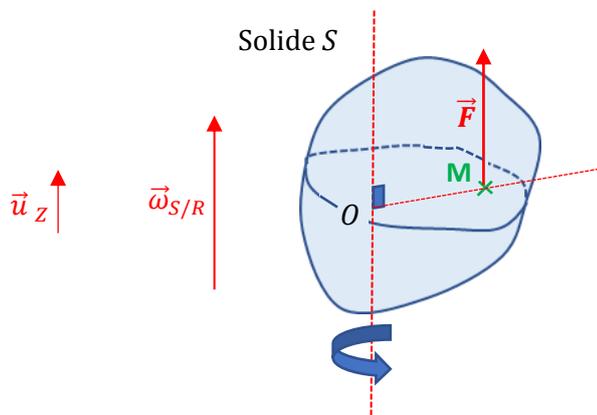
Posons  $\vec{F} = \vec{F}_\perp + \vec{F}_{\parallel}$  avec  $\vec{F}_\perp$  composante de  $\vec{F}$  orthogonale à l'axe de rotation et  $\vec{F}_{\parallel}$  composante de  $\vec{F}$  colinéaire à  $\vec{\omega}_{S/R}$  (cf schéma ci-dessus) :

$$M_{F/\Delta} = \vec{M}(O)_{\vec{F}} \cdot \vec{u}_z = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_\perp) \cdot \vec{u}_z + (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{\parallel}) \cdot \vec{u}_z$$

Avec  $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{\parallel}$  orthogonal à  $\vec{u}_z$  :  $(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{\parallel}) \cdot \vec{u}_z = 0$  donc :

$$M_{F/\Delta} = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_\perp) \cdot \vec{u}_z = \pm F_\perp \cdot d$$

On constate que seule la composante de la force  $\vec{F}$  orthogonale à l'axe de rotation a une influence sur la rotation du solide autour de l'axe ( $\Delta$ ). On en déduit que si une force  $\vec{F}$  est colinéaire au vecteur rotation instantané  $\vec{\omega}_{S/R}$  alors son moment est nul  $M_{F/\Delta} = 0$  :



### Bilan :

Le moment d'une force  $\vec{F}$  orthogonale à l'axe de rotation ( $\Delta$ ) noté  $M_{F/\Delta} = \vec{M}(O)_{\vec{F}} \cdot \vec{u}_z$  est donné par :

$$M_{F/\Delta} = \pm F \cdot d$$

avec  $\vec{\omega}_{S/R} = \omega \cdot \vec{u}_z$ .

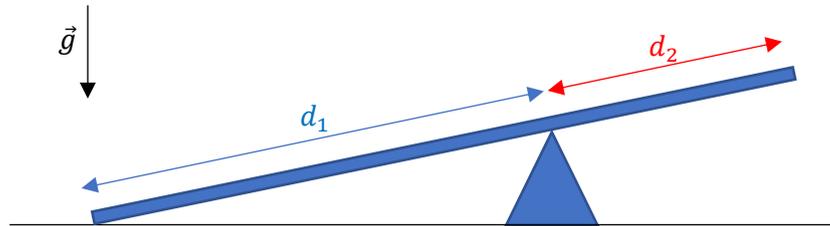
$M_{F/\Delta} = + F \cdot d$  si la force  $\vec{F}$  tend à faire tourner le solide  $S$  dans le sens de  $\vec{\omega}_{S/R}$

$M_{F/\Delta} = - F \cdot d$  si la force  $\vec{F}$  tend à faire tourner le solide  $S$  dans le sens opposé à  $\vec{\omega}_{S/R}$

avec  $d$  « bras de levier » de la force  $\vec{F}$  définie par :  $d = \|\overrightarrow{OM}\| \cdot |\sin(\overrightarrow{OM}, \vec{F})|$

-c- Exercice : équilibre d'une balançoire

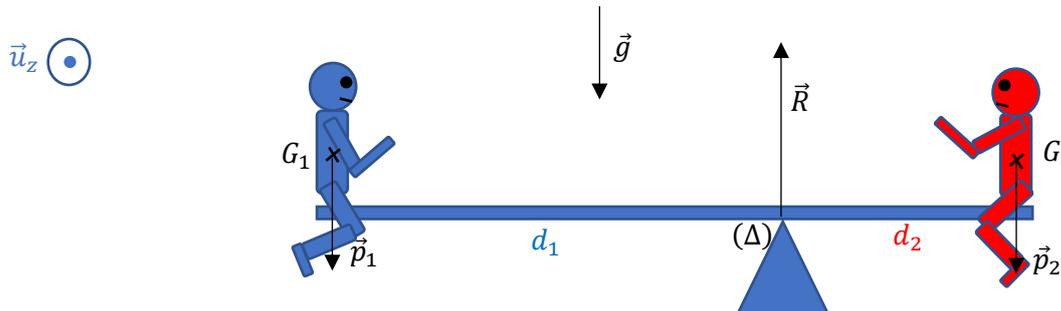
Un père et son fils montent sur une balançoire. On assimile l'enfant à un point matériel  $M_1(m_1)$  et le père à un point matériel  $M_2(m_2)$ . On néglige la masse du balancier devant les masses  $m_1$  et  $m_2$ . L'enfant est à la distance  $d_1$  de l'axe de la balançoire. Le père s'installe à la distance  $d_2$  nécessaire pour équilibrer la balançoire (c.à.d. balancier à l'horizontale).



- 1) Faites un schéma.
- 2) Définissez le système et le référentiel d'étude.
- 3) Faire le bilan des forces s'exerçant sur le système dans le référentiel d'étude.
- 4) Exprimer le moment des forces par rapport à l'axe de rotation de la balançoire.
- 5) Déterminer la distance  $d_2$  nécessaire pour que le père puisse équilibrer la balançoire. A.N. :  $m_1 = 20 \text{ kg}$  ;  $m_2 = 80 \text{ kg}$  ;  $d_1 = 4,0 \text{ m}$ .

**Corrigé :**

1) Schéma de la balançoire à l'équilibre



- 2) On étudie le système  $S = \{\text{balancier} + \text{enfant} + \text{père}\}$  dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
- 3) Dans ce référentiel, le système est soumis à :

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= m_1 \cdot \vec{g} : \text{poids de l'enfant} \\ \vec{p}_2 &= m_2 \cdot \vec{g} : \text{poids du père} \\ \vec{R} &: \text{action du support sur la balançoire} \end{aligned}$$

- 4) Somme des moments des forces par rapport à l'axe de la balançoire (projeté sur  $\vec{u}_z$ ) :

$$\begin{aligned} \text{Moment de } \vec{p}_1 : M_{p_1/\Delta} &= +m_1 \cdot g \cdot d_1 \\ \text{Moment de } \vec{p}_2 : M_{p_2/\Delta} &= -m_2 \cdot g \cdot d_2 \\ \text{Moment de la réaction } \vec{R} : M_{R/\Delta} &= 0 : \text{bras de levier nul} \end{aligned}$$

- 5) A l'équilibre :  $\sum M_{F/\Delta} = 0$  donc :

$$m_1 \cdot g \cdot d_1 - m_2 \cdot g \cdot d_2 = 0$$

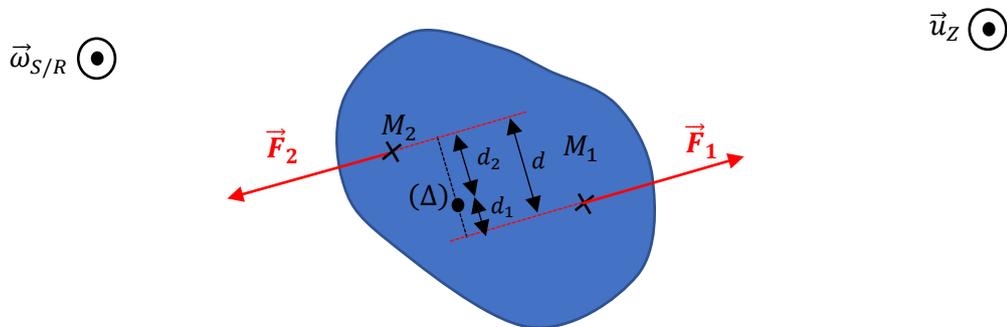
On en déduit que :

$$d_2 = \left(\frac{m_1}{m_2}\right) \cdot d_1$$

A.N. :  $d_2 = 1,0 \text{ m}$

-d- Couple de forces

On appelle couple de forces un ensemble de deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  tel que :  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ . Que peut-on dire du moment résultant  $M_{F,rés/\Delta}$  d'un couple de forces ?



$$M_{F,rés/\Delta} = M_{F_1/\Delta} + M_{F_2/\Delta}$$

En explicitant :  $M_{F_1/\Delta} = \pm F_1 \cdot d_1$ . Compte tenu du fait que  $\vec{F}_1$  tend à faire tourner le solide  $S$  dans le sens de  $\vec{\omega}_{S/R}$  :  $M_{F_1/\Delta} = + F_1 \cdot d_1$ . De la même manière,  $M_{F_2/\Delta} = + F_2 \cdot d_2$ . On en déduit que :

$$M_{F,rés/\Delta} = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2$$

Posons  $F = \|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\|$  et  $d = d_1 + d_2$  le bras de levier du couple (cf schéma ci-dessus). Le moment résultant se ramène à :

$$M_{F,rés/\Delta} = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 = F \cdot d$$

On constate que le moment d'un couple de forces est égal au produit de la force  $F = \|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\|$  par le bras de levier du couple.

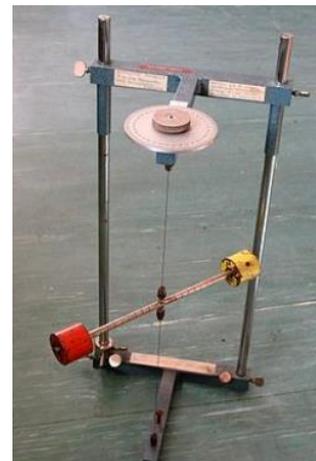
-e- Couple de torsion

Un pendule de torsion est composé d'un fléau horizontal fixé à un fil de torsion. Si on écarte le pendule de sa position d'équilibre, le fil de torsion exerce un couple de torsion (ou couple de rappel) qui tend à ramener le fléau dans sa position d'équilibre. On assimile le fléau au solide  $S$  observé dans le référentiel  $R$ .

On pose  $\vec{\omega}_{S/R} = \omega \cdot \vec{u}_Z$  vecteur rotation instantanée de  $S$  dans  $R$ . Pour de petits angles, le couple de torsion est proportionnel à l'angle  $\theta(t)$  mesuré par rapport à la position d'équilibre. On note  $C$  ce facteur de proportionnalité, appelé **constante de torsion** du pendule. Dans les unités du système international, la constante  $C$  s'exprime en  $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$  et l'angle  $\theta(t)$  en rad.

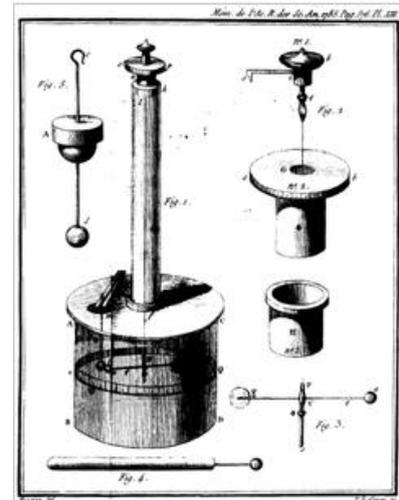
Le couple de torsion exercé par le fil sur le fléau est donné par la relation phénoménologique :

$$\vec{\Gamma} = -C \cdot \theta(t) \cdot \vec{u}_Z$$



Le pendule de torsion, également appelé « balance de torsion » ou « balance de Coulomb », est très sensible...

En 1784, Charles Augustin Coulomb rédige un traité sur l'utilisation du pendule de torsion. En 1786, c'est grâce à ce pendule qu'il découvre « l'interaction coulombienne » qui s'exerce entre deux particules chargées ponctuelles. A la même époque, c'est également avec un pendule de torsion que Henry Cavendish réussit à peser la Terre...



La balance de torsion de Coulomb  
(gravure des *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1784).

Aujourd'hui, des pendules de torsions d'une très grande sensibilité composés de fils extrêmement fins (fils d'araignées, diamètres de l'ordre de  $10 \mu m$ ) sont utilisés dans des laboratoires pour vérifier des phénomènes quantiques.



#### -f- Liaison pivot

Considérons un solide  $S$  en mouvement dans un référentiel  $R$ . Si le solide  $S$  est en contact mécanique avec autre solide immobile dans  $R$ , la partie mobile est appelée « le rotor » et la partie fixe « le stator ».

Dans une liaison pivot, le rotor est en rotation autour d'un axe fixe du stator. Exemples : fixation d'une pédale de vélo au pédalier, d'une roue de vélo à son cadre ou d'une porte à son cadre (à l'aide de gonds...).

On note  $(\Delta)$  l'axe de rotation du rotor par rapport au stator. On considère qu'une liaison pivot est parfaite si le moment des forces exercées par le stator sur le rotor est nul :

$$M_{F/\Delta}(\text{liaison}) = 0$$

Pour minimiser les phénomènes dissipatifs dans une liaison pivot, on utilise des roulements à billes ou des lubrifiants selon le type de liaison et les contraintes mécaniques.

### 3) Théorème de la puissance cinétique

Nous avons établi le théorème de la puissance cinétique pour un solide  $S$  observé dans un référentiel  $R$  galiléen au début du chapitre (en I.3) :

$$\left( \frac{dE_C(S)_R}{dt} \right)_R = P_{ext}$$

Que devient ce théorème pour un solide  $S$  en rotation autour d'un axe fixe  $(\Delta)$  dans le référentiel  $R$  ?

Nous savons que l'énergie cinétique de  $S$  peut s'exprimer en fonction du moment d'inertie du solide :

$$E_C(S)_R = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \omega^2$$

En explicitant :

$$\left( \frac{dE_C(S)_R}{dt} \right)_R = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \omega^2 \right) = J_{\Delta} \cdot \omega \cdot \left( \frac{d\omega}{dt} \right) = P_{ext}$$

Sachant que, par application du théorème du moment cinétique :

$$J_{\Delta} \cdot \left( \frac{d\omega_{S/R}}{dt} \right)_R = \sum M_{F/\Delta}$$

Par identification, on peut exprimer la puissance des forces extérieures par rapport à l'axe de rotation :

$$P_{ext} = \left( \sum M_{F/\Delta} \right) \cdot \omega$$

Nous retiendrons le théorème de la puissance cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe :

$$\left( \frac{dE_C(S)_R}{dt} \right)_R = P_{ext}$$

avec :  $E_C(S)_R = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \omega^2$  et  $P_{ext} = \left( \sum M_{F/\Delta} \right) \cdot \omega$

### Bilan :

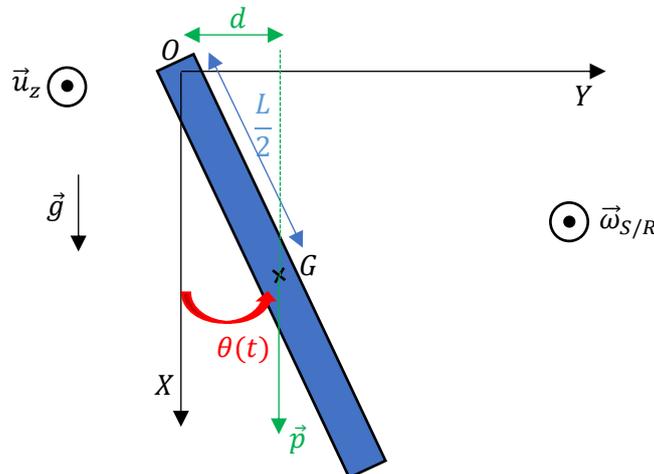
Théorème du moment cinétique (relation vectorielle)	$J_{\Delta} \cdot \left( \frac{d\vec{\omega}_{S/R}}{dt} \right)_R = \sum \vec{M}(O)_{\vec{F}_{ext}}$ avec $\vec{M}(O)_{\vec{F}_{ext}} = \vec{OM}_{\Delta} \wedge \vec{F}_{ext}$
Théorème du moment cinétique (relation scalaire)	$J_{\Delta} \cdot \left( \frac{d\omega_{S/R}}{dt} \right)_R = \sum M_{F/\Delta}$ Avec $M_{F/\Delta} = \vec{M}(O)_{\vec{F}_{ext}} \cdot \vec{u}_Z$
Théorème de la puissance cinétique	$\left( \frac{dE_C(S)_R}{dt} \right)_R = P_{ext}$ avec : $E_C(S)_R = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \omega^2$ et $P_{ext} = \left( \sum M_{F/\Delta} \right) \cdot \omega$

Dans la suite, nous allons illustrer le théorème du moment cinétique et de la puissance cinétique sur quelques exemples.

## IV : Applications

### 1) Pendule pesant

Un pendule pesant est composé d'une tige rigide de longueur  $L$ , de masse  $m$  en rotation autour d'un axe fixe ( $Oz$ ) dans le plan vertical. On note  $J_{Oz} = \frac{m.L^2}{3}$  le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation. Dans cette étude, nous ferons l'hypothèse que la liaison pivot est parfaite et nous négligerons les forces de frottements fluides exercées par l'air sur le pendule.



On assimile le pendule pesant à un solide  $S$  observé dans le référentiel terrestre galiléen. Dans ce référentiel,  $S$  est soumis à son poids et aux actions de contact résultant de la liaison pivot. Etablissons l'équation différentielle du mouvement de  $S$  dans  $R$  à partir du théorème du moment cinétique :

$$J_{Oz} \cdot \left( \frac{d\omega_{S/R}}{dt} \right)_R = \sum M_{F/Oz}$$

En explicitant :

$$J_{Oz} \cdot \ddot{\theta}(t) = M_{p/Oz} + M_{F/Oz}(\text{liaison})$$

- En faisant l'hypothèse que la liaison pivot est parfaite :  $M_{F/Oz}(\text{liaison}) = 0$ .
- Moment du poids par rapport à l'axe ( $Oz$ ) :  $M_{p/Oz} = -m \cdot g \cdot d = -m \cdot g \cdot \frac{L}{2} \sin \theta(t)$

On établit l'équation différentielle du mouvement de  $S$  dans  $R$  :

$$J_{Oz} \cdot \ddot{\theta}(t) = -m \cdot g \cdot \frac{L}{2} \sin \theta(t)$$

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{m \cdot g \cdot L}{2 \cdot J_{Oz}} \sin \theta(t) = 0$$

Pour  $\theta(t)$  quelconque, cette équation différentielle est non linéaire. Pour de petits angles, on peut faire l'hypothèse que  $\sin \theta(t) = \theta(t)$  et le pendule pesant est assimilable à un oscillateur harmonique d'équation :

$$\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2 \cdot \theta(t) = 0$$

avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot L}{2 \cdot J_{Oz}}}$$

Avec  $J_{Oz} = \frac{m.L^2}{3}$  on peut exprimer la pulsation propre en fonction de la longueur  $L$  du pendule :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot L}{2 \cdot J_{Oz}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot g}{2 \cdot L}}$$

**Exercice :** Retrouver l'équation différentielle du mouvement du pendule pesant à partir d'un théorème énergétique. Est-il possible d'établir cette équation à partir du théorème de la résultante cinétique ? Commenter.

**Corrigé :**

Appliquons le théorème de la puissance cinétique au pendule pesant :

$$\left(\frac{dE_C(S)_R}{dt}\right)_R = P_{ext} \text{ avec : } E_C(S)_R = \frac{1}{2}J_{\Delta} \cdot \omega^2 \text{ et } P_{ext} = (\sum M_{F/\Delta}) \cdot \omega$$

Nous savons que :  $\sum M_{F/Oz} = M_{p/Oz} + M_{F/Oz}(\text{liaison})$  avec :

$$M_{p/Oz} = -m \cdot g \cdot \frac{L}{2} \sin \theta(t)$$

$$M_{F/Oz}(\text{liaison}) = 0 \text{ (liaison pivot parfaite)}$$

Soit :

$$\sum M_{F/Oz} = -m \cdot g \cdot \frac{L}{2} \sin \theta(t)$$

Avec  $\omega = \dot{\theta}(t)$ , en explicitant on établit que :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_{Oz} \cdot \dot{\theta}(t)^2 \right) = -m \cdot g \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \frac{L}{2} \sin \theta(t)$$

$$J_{Oz} \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \ddot{\theta}(t) = -m \cdot g \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \frac{L}{2} \sin \theta(t)$$

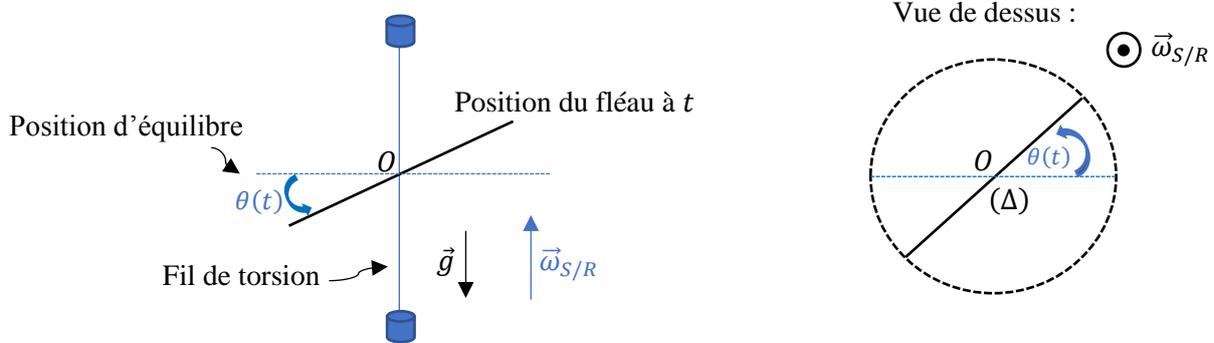
On établit l'équation différentielle vérifiée par  $\theta(t)$  :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{m \cdot g \cdot L}{2 \cdot J_{Oz}} \sin \theta(t) = 0$$

On vérifie que cette équation est bien identique à celle établie à partir du TMC. Les forces de liaisons qui s'exercent au niveau de la liaison pivot sont inconnues... donc l'établissement de l'équation différentielle attendue n'est pas « immédiate » à partir du théorème de la résultante cinétique.

## 2) Pendule de torsion

On considère un pendule de torsion composé d'un fil (de constante de torsion  $C$ ) de masse négligeable et d'un fléau horizontal de masse  $m$ , de longueur  $L$  et de moment d'inertie  $J_{\Delta} = \frac{1}{12} m \cdot L^2$  par rapport au fil. On écarte le pendule de sa position d'équilibre et on note  $\theta(t)$  l'angle que fait le fléau par rapport à sa position d'équilibre. En négligeant tous les phénomènes dissipatifs, établissons l'équation différentielle vérifiée par  $\theta(t)$ .



On assimile le fléau à un solide  $S$  en rotation autour de l'axe fixe  $(\Delta)$  dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Dans ce référentiel, le fléau est soumis à son poids, à la tension du fil ainsi qu'au couple de torsion. Appliquons le théorème du moment cinétique à  $S$  dans  $R$  :

$$J_{\Delta} \cdot \left( \frac{d\omega_{S/R}}{dt} \right)_R = \sum M_{F/\Delta}$$

En explicitant :

$$J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}(t) = M_{p/\Delta} + M_{T/\Delta} + \Gamma$$

En notant que le bras de levier du poids et de la tension est nul :  $M_{p/\Delta} = 0$  et  $M_{T/\Delta} = 0$ .

Avec  $\Gamma = -C \cdot \theta(t)$  on établit l'équation différentielle :

$$J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}(t) = -C \cdot \theta(t)$$

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{C}{J_{\Delta}} \cdot \theta(t) = 0$$

Le pendule de torsion est assimilable à un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_{\Delta}}}$  :

$$\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2 \cdot \theta(t) = 0$$

Soit  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{C}}$  : la période propre du fléau. On constate que la mesure de  $T_0$  permet de

déterminer la constante de raideur du fil de torsion :  $C = \frac{4\pi^2 \cdot J_{\Delta}}{T_0^2}$

**Exercice 1:**

1) En explicitant la puissance des forces extérieures s'exerçant sur le pendule, montrer que le couple de torsion dérive d'une fonction énergie potentielle :

$$E_p(\theta) = \frac{1}{2} C \cdot \theta^2(t)$$

en posant arbitrairement que l'énergie potentielle est nulle pour  $\theta(t) = 0$ .

2) Donnez l'expression de l'énergie mécanique de  $S$  dans  $R$ . Justifier que l'énergie mécanique est constante puis retrouvez l'équation différentielle du mouvement du pendule dans le référentiel d'étude.

**Corrigé :**

1) Nous savons que  $\sum M_{F/\Delta} = -C \cdot \theta(t)$ . Sachant que :

$$P_{ext} = \left( \sum M_{F/\Delta} \right) \cdot \omega$$

On établit que :

$$P_{ext} = -C \cdot \theta(t) \cdot \dot{\theta}(t)$$

Avec :

$$P_{ext} = \frac{\delta w}{dt}$$

Posons  $\delta w = -dE_p$  avec  $E_p$  fonction énergie potentielle recherchée :

$$-\frac{dE_p}{dt} = -C \cdot \theta(t) \cdot \dot{\theta}(t)$$

En primitivant, et en posant arbitrairement que  $E_p(0) = 0$ , on établit la fonction énergie potentielle :

$$E_p(\theta) = \frac{1}{2} C \cdot \theta^2(t)$$

2) Soit  $E_m(S)$  l'énergie mécanique du système dans le référentiel terrestre :

$$E_m(S) = E_c(S) + E_p(\theta) = \text{cte}$$

En notant que  $\delta w^{nc} = 0$ , donc  $dE_m(S) = 0$  et  $E_m(S) = \text{cte}$ . En explicitant, on établit que :

$$E_m(S) = \frac{1}{2} J_\Delta \cdot \dot{\theta}(t)^2 + \frac{1}{2} C \cdot \theta^2(t) = \text{cte}$$

En dérivant par rapport au temps :

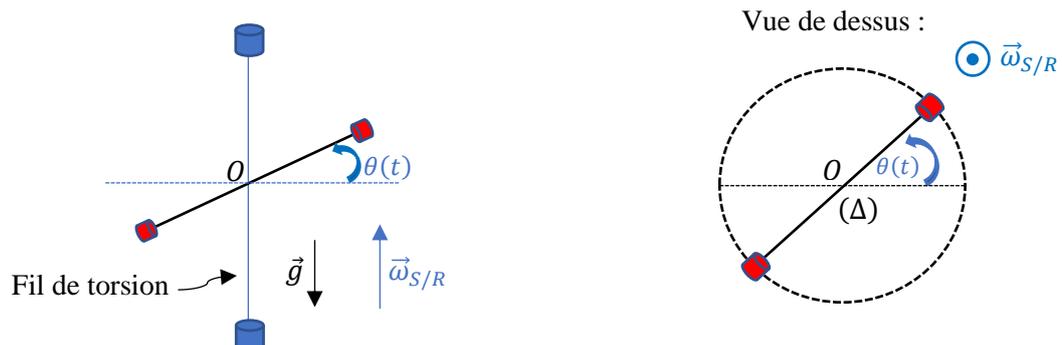
$$J_\Delta \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \ddot{\theta}(t) + C \cdot \theta(t) \cdot \dot{\theta}(t) = 0$$

Avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$  on établit alors l'équation différentielle du pendule de torsion :

$$\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2 \cdot \theta(t) = 0$$

**Exercice 2:**

On considère le même pendule de torsion que précédemment (de moment d'inertie  $J_\Delta$ ), mais on fixe un bloc métallique de masse  $m_1$  à chaque extrémité du fléau, à une distance  $\frac{L}{2}$  du fil de torsion :



1) Sachant que le moment d'inertie d'un solide en rotation par rapport à un axe fixe ( $\Delta$ ) est donné par  $J_{\Delta} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot r_i^2$  déterminer le moment d'inertie résultant  $J_{\Delta \text{rés}}$  du système  $S = \{\text{fléau} + 2 \text{ masses } m_1\}$ .

2) Que devient cette expression si la masse du fléau ( $m$ ) est négligeable devant celle des blocs métalliques :  $m \ll m_1$  ?

### Corrigé :

1) Le moment d'inertie de  $S = \{\text{fléau} + 2 \text{ masses } m_1\}$  est la somme des moments d'inertie du fléau et des 2 masses  $m_1$  :

$$J_{\Delta \text{rés}} = J_{\Delta} + 2 \cdot J_1$$

Avec :

$$J_1 = m_1 \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} m_1 \cdot L^2$$

On établit que :

$$J_{\Delta \text{rés}} = J_{\Delta} + \frac{1}{2} m_1 \cdot L^2$$

2) Avec  $J_{\Delta} = \frac{1}{12} m \cdot L^2$ , si  $m \ll m_1$  alors :

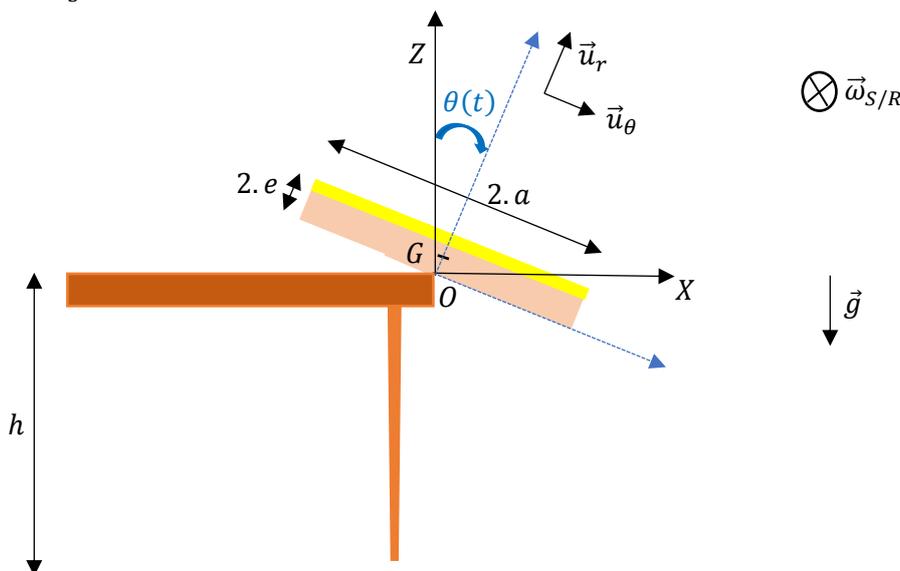
$$J_{\Delta \text{rés}} = \frac{1}{2} m_1 \cdot L^2$$

Ceci revient à négliger le moment d'inertie du fléau devant celui des deux masses  $m_1$ .

### 3) Chute d'une tartine

Existe-t-il une raison pour laquelle les tartines beurrées tomberaient plus souvent du côté beurré ? Le but de cet exercice est d'apporter une réponse. On imagine une tartine homogène de longueur  $2 \cdot a$ , de largeur  $2 \cdot b$ , d'épaisseur  $2 \cdot e$  et de masse  $m$  posée sur une table. Sans faire attention, une personne la pousse vers le bord très lentement. Quand le milieu de la tartine atteint le bord  $O$ , la tartine amorce une rotation autour de l'arête  $Oy$ . L'action de la table sur la tartine est modélisée par une force  $\vec{R} = T \cdot \vec{u}_{\theta} + N \cdot \vec{u}_r$  appliquée en  $O$ .

On note  $\theta$  l'angle entre la tartine et l'horizontale. On donne le moment d'inertie de la tartine par rapport à l'axe  $Oy$  :  $J_{Oy} = \frac{1}{3} m(a^2 + 4 \cdot e^2)$ .



1) A l'aide d'une approche énergétique, exprimer  $\dot{\theta}$  en fonction de  $\theta$  ainsi que  $\dot{\theta}$  en fonction de  $\theta$ .

2) Retrouver l'expression de  $\ddot{\theta}$  en fonction de  $\theta$  à l'aide d'un théorème de dynamique.

3) Projeter la loi de la quantité de mouvement appliquée à la tartine sur les vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_{\theta}$  et déterminer  $T$  et  $N$ . Avec  $a = 4,0 \text{ cm}$  et  $e = 0,40 \text{ cm}$ , simplifier ces expressions. La tartine peut-elle

quitter la table sans glisser ? Comme le coefficient de frottement table-tartine vaut à peu près 1, à quel angle  $\theta_0$  la tartine commence-t-elle à glisser ?

4) A partir de cet instant pris comme origine du temps, la tartine quitte la table en un temps très bref, conservant quasiment la même orientation  $\theta_0$  et la même vitesse angulaire. Quelle est, après avoir quitté la table, la loi d'évolution de  $z_G(t)$ , où  $G$  est le barycentre de la tartine, en supposant que la tartine ne retouche plus la table ?

5) Déterminer le temps  $\tau$  pour lequel la tartine touche le sol. On considérera que la hauteur  $h$  de la table est évidemment nettement supérieure aux dimensions de la tartine et que la vitesse initiale de la tartine est très faible devant sa vitesse finale.

6) On admet que pendant la phase de vol, la vitesse angulaire de la tartine reste constante, égale à  $\omega_0$ . Quelle est son expression ? En déduire  $\theta(\tau)$ . Application numérique pour  $h = 70 \text{ cm}$ .

7) De quel côté tombe la tartine si on suppose qu'il n'y a pas de rebond ?

Donnée :  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .

### Corrigé :

1) On considère le système  $S = \{\text{la tartine}\}$  observé dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Dans ce référentiel,  $S$  est soumis à :

- son poids  $\vec{p}$  qui s'applique en  $G$ .
- la réaction de la table  $\vec{R}$ , qui s'applique en  $O$ .

Sachant que :  $dE_m(S) = \delta W^{nc}$  que peut-on dire du travail des forces ? Le poids est une force conservative et la réaction  $\vec{R}$  ne travaille pas (le point d'application de la force  $\vec{R}$  est fixe) donc  $\delta W^{nc} = 0$ . On en déduit que l'énergie mécanique du système est constante :

$$E_m(S) = \text{cte}$$

En explicitant :

$$E_m(S) = E_C(S) + E_P = \text{cte}$$

Avec :

$$E_C(S) = \frac{1}{2} J_{Oy} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} J_{Oy} \cdot \dot{\theta}^2$$

$$E_P = m \cdot g \cdot z_G = m \cdot g \cdot e \cdot \cos \theta$$

en prenant l'origine de la fonction énergie potentielle en  $z_G = 0$ . Soit :

$$E_m(S) = \frac{1}{2} J_{Oy} \cdot \dot{\theta}^2 + m \cdot g \cdot e \cdot \cos \theta = \text{cte}$$

En dérivant par rapport au temps :

$$\frac{dE_m(S)}{dt} = J_{Oy} \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} - m \cdot g \cdot e \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta = 0$$

On établit que :

$$\ddot{\theta} = \frac{m \cdot g \cdot e}{J_{Oy}} \sin \theta$$

En explicitant  $J_{Oy} = \frac{1}{3} m(a^2 + 4 \cdot e^2)$  :

$$\ddot{\theta} = \frac{3 \cdot g \cdot e}{a^2 + 4 \cdot e^2} \sin \theta$$

Quant à l'expression de  $\dot{\theta}$  en fonction de  $\theta$ , elle est donnée par l'expression de l'énergie mécanique :

$$E_m(S) = \frac{1}{2} J_{Oy} \cdot \dot{\theta}^2 + m \cdot g \cdot e \cdot \cos \theta = \text{cte}$$

Sachant qu'à  $t = 0$  : la vitesse initiale est nulle et que  $\theta(0) = 0$  :

$$E_m(S) = m \cdot g \cdot e$$

On établit alors que :

$$\frac{1}{2} J_{Oy} \cdot \dot{\theta}^2 + m \cdot g \cdot e \cdot \cos \theta = m \cdot g \cdot e$$

Soit :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot e}{J_{Oy}} (1 - \cos \theta)$$

En explicitant  $J_{Oy} = \frac{1}{3} m(a^2 + 4 \cdot e^2)$  :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6 \cdot g \cdot e}{a^2 + 4 \cdot e^2} (1 - \cos \theta)$$

Rq. : Nous aurions pu établir cette relation à partir de l'expression de  $\ddot{\theta}$ . Il suffit en effet de multiplier cette relation par  $\dot{\theta}$  puis de primitiver :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} &= \frac{3 \cdot g \cdot e}{a^2 + 4 \cdot e^2} \dot{\theta} \cdot \sin \theta \\ \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 &= \frac{3 \cdot g \cdot e}{a^2 + 4 \cdot e^2} (-\cos \theta) + \text{cte} \end{aligned}$$

Soit :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6 \cdot g \cdot e}{a^2 + 4 \cdot e^2} (-\cos \theta) + \text{cte}$$

Sachant qu'à  $t = 0$  :  $\theta(0) = 0$  et que  $\dot{\theta}(0) = 0$  on vérifie que :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6 \cdot g \cdot e}{a^2 + 4 \cdot e^2} (1 - \cos \theta)$$

2) Retrouvons cette relation à partir du théorème du moment cinétique :

$$J_{Oy} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \sum M_{F/Oy}$$

En notant que le moment de la réaction du support est nul, il reste :

$$\sum M_{F/Oy} = M_{p/Oy} = +m \cdot g \cdot e \cdot \sin \theta$$

On établit que :

$$J_{Oy} \cdot \ddot{\theta} = m \cdot g \cdot e \cdot \sin \theta$$

On vérifie que :

$$\ddot{\theta} = \frac{m \cdot g \cdot e}{J_{Oy}} \sin \theta = \frac{3 \cdot g \cdot e}{a^2 + 4 \cdot e^2} \sin \theta$$

3) Appliquons le théorème de la résultante cinétique à  $S$  dans le référentiel d'étude :

$$m \cdot \vec{a}(G) = \vec{p} + \vec{R}$$

En projetant dans la base de coordonnées polaires (avec  $r = e = \text{cte}$ ) :

- sur  $\vec{u}_r$  :  $m \cdot (\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2) = -m \cdot e \cdot \dot{\theta}^2 = -m \cdot g \cdot \cos \theta + N$  (1)
- sur  $\vec{u}_\theta$  :  $m \cdot (2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta} + r \cdot \ddot{\theta}) = m \cdot e \cdot \ddot{\theta} = m \cdot g \cdot \sin \theta + T$  (2)

Sachant que :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6 \cdot g \cdot e}{a^2 + 4 \cdot e^2} (1 - \cos \theta)$$

Avec la relation (1) on établit que :

$$N = m \cdot g \cdot \cos \theta - m \cdot e \cdot \dot{\theta}^2 = m \cdot g \cdot \left( \cos \theta - \frac{6 \cdot e^2}{a^2 + 4 \cdot e^2} (1 - \cos \theta) \right)$$

Sachant que :

$$\ddot{\theta} = \frac{3 \cdot g \cdot e}{a^2 + 4 \cdot e^2} \sin \theta$$

Avec la relation (2) on établit que :

$$T = m \cdot e \cdot \ddot{\theta} - m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot g \cdot \sin \theta \cdot \left( \frac{3 \cdot e^2}{a^2 + 4 \cdot e^2} - 1 \right)$$

A.N. : avec  $a = 4,0 \text{ cm}$  et  $e = 0,40 \text{ cm}$  :

$$\frac{e^2}{a^2 + 4 \cdot e^2} = 9,6 \cdot 10^{-3}$$

On peut donc faire l'approximation que :  $N = m \cdot g \cdot \cos \theta$  et  $T = -m \cdot g \cdot \sin \theta$ . Soit l'expression du vecteur  $\vec{R}$  :

$$\vec{R} = m \cdot g \cdot \cos \theta \cdot \vec{u}_r - m \cdot g \cdot \sin \theta \cdot \vec{u}_\theta$$

Il y a amorçe de glissement dès que la relation de Coulomb (du frottement solide) est vérifiée :  $|T| = f \cdot N$ . Avec  $f = 1$  (cf énoncé), il y a amorçe de glissement pour un angle  $\theta_0$  tel que :  $m \cdot g \cdot \cos \theta_0 = m \cdot g \cdot \sin \theta_0$  c.à.d. pour  $\theta_0 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ . La tartine quitte la table dès que :  $N = 0$  donc pour un angle  $\theta_1 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ . On vérifie qu' **il y a amorçe de glissement avant la rupture de contact**.

4) Appliquons le théorème de la résultante cinétique au système (à partir du moment où la tartine quitte son support). Elle est alors soumise uniquement à son poids :

$$m \cdot \vec{a}(G) = \vec{p}$$

Soit :

$$\ddot{z}_G = -g$$

En négligeant la vitesse initiale, on établit que :

$$\dot{z}_G(t) = -g \cdot t$$

puis :

$$z_G(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + e \cdot \sin \theta_0$$

avec  $\overrightarrow{OG}(t=0) = e \cdot \sin \theta_0 \cdot \vec{u}_x + e \cdot \cos \theta_0 \cdot \vec{u}_z$ .

5) La tartine touche le sol à l'instant  $\tau$  tel que  $z_G(\tau) = -h + e$ . soit :  $-h + e = -\frac{1}{2} g \cdot \tau^2 + e \cdot \cos \theta_0$

Soit :

$$h - e \cdot (1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2} g \cdot \tau^2$$

Compte tenu du fait que  $e \ll h$  :

$$\tau = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

6) Par définition :

$$\omega_0 = \dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{6 \cdot g \cdot e}{a^2 + 4 \cdot e^2} (1 - \cos \theta_0)}$$

Pendant la chute, la vitesse angulaire de la tartine est constante donc :  $\dot{\theta}(t) = \omega_0 = \text{cte}$

On en déduit que :

$$\theta(t) = \omega_0 \cdot t + \theta_0$$

Pour  $t = \tau$  :

$$\theta(\tau) = \omega_0 \cdot \tau + \theta_0$$

En explicitant :

$$\theta(\tau) = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} + \theta_0$$

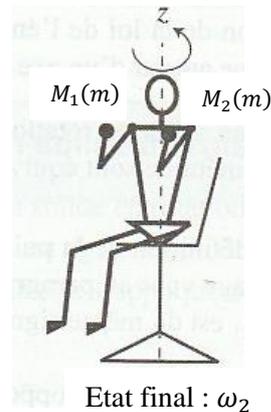
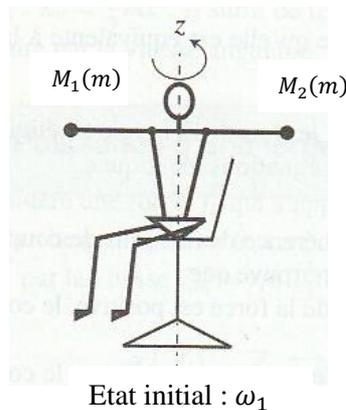
A.N. :  $\theta_0 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$  et  $\omega_0 = 6,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Après calcul :  $\theta(\tau) = 3,2 \text{ rad} = 1,0 \cdot \pi$

7) On constate que la tartine tombe du « coté beurré » même si rien dans nos calculs ne prend en compte l'influence du « beurre ».

## V : Systèmes déformables

### 1) Expérience du tabouret d'inertie

Considérons un individu assis sur un tabouret d'inertie. Cet individu porte une masse  $m = 5,0 \text{ kg}$  dans chaque main, bras tendu à l'horizontale. Un opérateur extérieur met le tabouret d'inertie en rotation avec une vitesse angulaire initiale  $\omega_1$  autour de l'axe fixe ( $Oz$ ) vertical ascendant. A un moment donné, l'individu décide de rapprocher les deux masses de l'axe de rotation... On constate que la vitesse angulaire augmente. Soit  $\omega_2$  cette nouvelle vitesse angulaire :  $\omega_2 > \omega_1$ .



### 2) Moment cinétique

Considérons le système  $S = \{\text{individu} + 2 \text{ masses } m + \text{siège du tabouret}\}$  déformable. Le système est en rotation autour d'un axe fixe ( $Oz$ ). Dans cette étude, nous supposons que la liaison pivot du tabouret d'inertie est parfaite. Le système est observé dans le référentiel terrestre  $R$  supposé galiléen. Il est soumis à des forces extérieures : son poids, la réaction du support, aux forces de liaison ainsi qu'à des forces intérieures nécessaires pour rapprocher les 2 masses.

Appliquons le théorème du moment cinétique au système  $S$  déformable :

$$\left(\frac{d\vec{L}_S(O)_R}{dt}\right) = \sum \vec{M}(O)_{\vec{F}_{int}} + \sum \vec{M}(O)_{\vec{F}_{ext}}$$

En notant que le bras de levier des forces intérieures est nul :

$$\sum \vec{M}(O)_{\vec{F}_{int}} = \overline{OM}_1 \wedge \vec{F}_1 + \overline{OM}_2 \wedge \vec{F}_2 = \vec{0}$$

En notant que le bras de levier du poids et de la réaction du support est nul et que la liaison pivot est parfaite :

$$\sum \vec{M}(O)_{\vec{F}_{ext}} = \vec{0}$$

On en déduit que le moment cinétique du système  $S$  est un vecteur constant :

$$\vec{L}_S(O)_R = \text{cte}$$

En assimilant le système  $S$  à un solide en rotation autour d'un axe fixe, dans l'état initial et dans l'état final, on en déduit que :

$$J_1 \cdot \omega_1 = J_2 \cdot \omega_2$$

Sachant que le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(Oz)$  de rotation est défini par  $J = \sum_{i=1}^N m_i \cdot r_i^2$  on vérifie que  $J_2 < J_1$  (l'individu rapproche ses bras du corps) ce qui implique que  $\omega_2 > \omega_1$ .

### 3) Energie cinétique

Nous savons que l'énergie cinétique d'un solide  $S$  en rotation autour d'un axe fixe est donnée par :

$$E_C(S)_R = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

Sachant que le moment cinétique de  $S$  est constant :  $J_1 \cdot \omega_1 = J_2 \cdot \omega_2$  que peut-on dire de l'énergie cinétique de  $S$  dans  $R$  ?

Soit  $E_{C1} = \frac{1}{2} J_1 \cdot \omega_1^2$  l'énergie cinétique initiale et  $E_{C2} = \frac{1}{2} J_2 \cdot \omega_2^2$  l'énergie cinétique finale. Exprimons  $E_{C2}$  en fonction de  $E_{C1}$  de  $J_1$  et de  $J_2$  :

$$E_{C2} = \frac{1}{2} J_2 \cdot \omega_2^2 = \frac{1}{2 \cdot J_2} (J_2 \cdot \omega_2)^2 = \frac{1}{2 \cdot J_2} (J_1 \cdot \omega_1)^2 = \frac{J_1}{J_2} \left( \frac{1}{2} J_1 \cdot \omega_1^2 \right)$$

$$E_{C2} = \frac{J_1}{J_2} E_{C1}$$

Avec  $J_2 < J_1$  on constate que  $E_{C2} > E_{C1}$

Nous avons vu le théorème de l'énergie cinétique pour les systèmes déformables dans le chapitre VII :

$$dE_C(S)_R = \delta w_{int} + \delta w_{ext}$$

Dans cette expérience, le travail des forces extérieures est nul :  $\delta w_{ext} = 0$ . Ainsi :

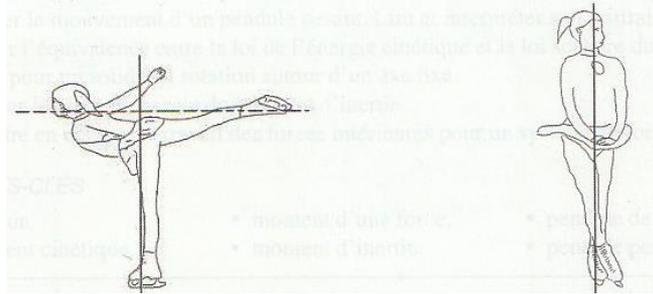
$$dE_C(S)_R = \delta w_{int} \neq 0$$

On constate que la variation d'énergie cinétique est due au travail des forces intérieures.

## 4) Illustrations

Il existe de très nombreuses illustrations de ce phénomène dans la nature... Parmi celles-ci, on peut citer :

- La variation de vitesse angulaire d'une patineuse artistique lorsqu'elle rapproche ses bras de son corps :



- La variation de distance Terre-Lune. En considérant que le moment cinétique du couple Terre-Lune est constant, du fait du frottement de la Terre contre les bourrelets océaniques (champ de marée) la vitesse angulaire de la Terre autour de l'axe des pôles diminue (c.à.d. que la durée du jour augmente...) et la distance Terre-Lune augmente (de 3cm/an).
- La variation de distance entre la planète Mars et son satellite Phobos. Pour le couple Mars-Phobos, compte tenu du fait que le satellite de Mars tourne plus vite que la planète, sa vitesse angulaire augmente (là aussi à cause des champs de marée...). Ceci entraîne une diminution de la distance entre Mars et son satellite... qui finira par tomber sur sa planète !

