

Problème 1 Rosetta

Données numériques :

Grandeurs physiques

- Masse du Soleil : $M_S = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg
- Masse de la Terre : $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg
- Rayon moyen de l'orbite de la Terre autour du Soleil : 1 unité astronomique (ua) = $150 \cdot 10^6$ km
- Rayon de la Terre : $R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km
- Constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m³kg⁻¹s⁻²
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8$ m.s⁻¹
- Constante de Planck : $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C
- Masse d'un électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg
- 1 électron-volt = $1,6 \cdot 10^{-19}$ J

Données techniques relatives à Rosetta :

- Masse à vide de Rosetta : 1300 kg
- Charge utile du lanceur Ariane 5G+ : 6950 kg

Caractéristiques de la comète Tchourioumov-Guérassimenko :

- Distance du soleil au moment du rendez-vous avec Rosetta : $R_{sc} = 3,3$ ua
- Diamètre du noyau $D_c = 4$ km
- Surface apparente de la comète exposée au Soleil $S = \frac{\pi}{4} D_c^2$
- Albedo du noyau (fraction du rayonnement solaire incident réfléchi par le noyau) : $r = 4\%$

A Instrumentation à bord de Rosetta : OSIRIS

OSIRIS (Optical, Spectroscopic, and Infrared Remote Imaging System) est l'un des instruments scientifiques embarqués à bord de Rosetta. Il s'agit d'un système de deux caméras, une caméra haute résolution (NAC) et une caméra grand champ (WAC).

Les objectifs d'OSIRIS sont de :

- parvenir à détecter 67P/TG à une distance de 10^6 km,
- trouver un site pour l'atterrisseur Philae,
- caractériser la forme de la comète, son volume,
- observer le noyau de la comète, son activité et son environnement.

Dans la suite de cet exercice, on modélisera le système optique des caméras par une lentille mince. L'image est formée sur un capteur CCD. Les tableaux suivant donnent les propriétés des caméras NAC et WAC.

	NAC	WAC
Distance focale (mm)	717,4	132
Longueur d'onde (nm)	250-1000	240-720
Nombre d'ouverture	8	5,6
Facteur de transmission T	0,70	0,70

	Capteur CCD
Nombre de pixels	2045×2048
Taille d'un pixel	$13,5 \times 13,5 \mu\text{m}^2$
rapport signal sur bruit	10

On indique que :

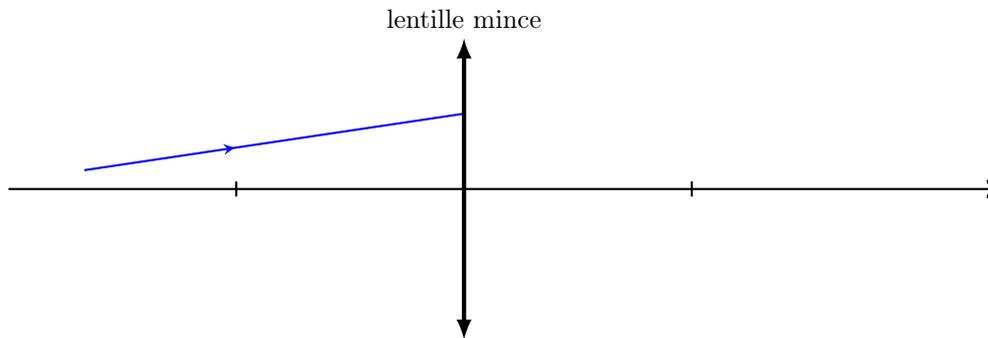
- L'ouverture relative d'un instrument, appelée aussi nombre d'ouverture N.O., est le rapport entre la distance focale f' et le diamètre D de l'objectif : $\text{N.O.} = \frac{f'}{D}$.
- Le facteur de transmission T indique la probabilité pour qu'un photon entrant dans le système optique atteigne effectivement le capteur CCD.
- Lorsque l'on attend l'arrivée de N photons sur un pixel, la valeur effectivement observée fluctue autour de N . La fluctuation typique sur une mesure de N photons est \sqrt{N} . Le rapport signal sur bruit (noté S/B) correspond alors $S/B = \frac{N}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}$. Le tableau donne la valeur minimale du rapport S/B pour qu'un signal soit détecté par l'instrument.

Questions préliminaires

A.1 Rappeler ce que sont les conditions de Gauss en optique géométrique. Pourquoi est-il souhaitable d'utiliser les instruments d'optique dans les conditions de Gauss ?

A.2 Donner la définition du foyer objet et du foyer image d'un système optique centré.

A.3 On considère une lentille mince convergente de distance focale f' . Reproduire le schéma de la figure ci-dessous sur votre copie. Placer les foyers principaux objet F et image F' et construire géométriquement le rayon émergent en indiquant la méthode employée.



Détection de la comète

A.4 Indiquer à quelle distance de la lentille est placé le capteur CCD.

On cherche à déterminer si les caractéristiques de la caméra WAC permettent la détection de la comète à une distance de 10^6 km. Les données utiles relatives à la comète sont fournies à la fin de l'exercice.

A.5 Montrer que, à une distance de $d_{rc} = 10^6$ km, la taille de l'image géométrique de la comète est inférieure à 1 pixel.

A.6 En tenant compte de la diffraction, exprimer le diamètre d de la tâche de diffraction obtenue dans le plan focal de la lentille en fonction de λ , f' et D . L'image de la comète est-elle toujours inférieure à 1 pixel ? On rappelle l'expression du demi-angle du faisceau diffracté par une ouverture circulaire de diamètre D : $\sin \theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}$.

A.7 On donne l'expression de la puissance lumineuse reçue par la comète : $P_i = FS \frac{1}{R_{sc}^2}$ où F est la constante solaire, S , la surface apparente de la comète exposée au Soleil et R_{sc} la distance entre la comète et le Soleil exprimée en u.a. En déduire l'expression et la valeur numérique de la puissance lumineuse réfléchiée par la comète P_e .

A.8 Connaissant, la puissance lumineuse surfacique provenant de la comète reçue au niveau de la caméra $I_r = 1.10^{-11} \text{ W.m}^{-2}$, en déduire l'expression et la valeur numérique de la puissance lumineuse provenant de la comète, reçue par le capteur CCD de la caméra WAC.

A.9 Quel est le nombre N de photons par seconde correspondant ?

A.10 Une durée d'acquisition de 1 s par image permet-elle de satisfaire au cahier des charges d'OSIRIS ?

B Navigation spatiale de la sonde Rosetta

Rosetta est une mission de l'agence spatiale européenne (ESA) qui a pour but d'étudier la comète Tchourioumov-Guérassimenko (67P/TG). La sonde a été lancée le 2 Mars 2004 par une fusée Ariane 5. Après un voyage de près de 10 ans pendant lequel elle aura parcouru près de 6,5 milliards de km, Rosetta a atteint la comète en août 2014 pour une période d'observation de 18 mois. La sonde est constituée d'un satellite principal et d'un atterrisseur (Philae). En novembre 2014, le module Philae a été envoyé à la surface de la comète. L'objet de cette épreuve est d'aborder quelques questions relatives à la mission Rosetta. On désigne dans l'énoncé par v le module du vecteur \vec{v} .



Tout résultat fourni par l'énoncé peut être utilisé par la suite même s'il n'a pas été obtenu par le candidat.

Questions préliminaires

B.1 On considère un objet à distribution de masse à symétrie sphérique de rayon R , de masse totale M et de centre O . Exprimer le champ de gravitation créé par cet objet à une distance $r \geq R$ en l'assimilant à un point matériel.

B.2 Donner l'expression de la force de gravitation \vec{F} que le Soleil exerce sur un objet de masse m situé à une distance r de son centre ($r > R_S$ où R_S est le rayon du Soleil).

B.3 Montrer que cette force est conservative et donner l'expression de l'énergie potentielle associée.

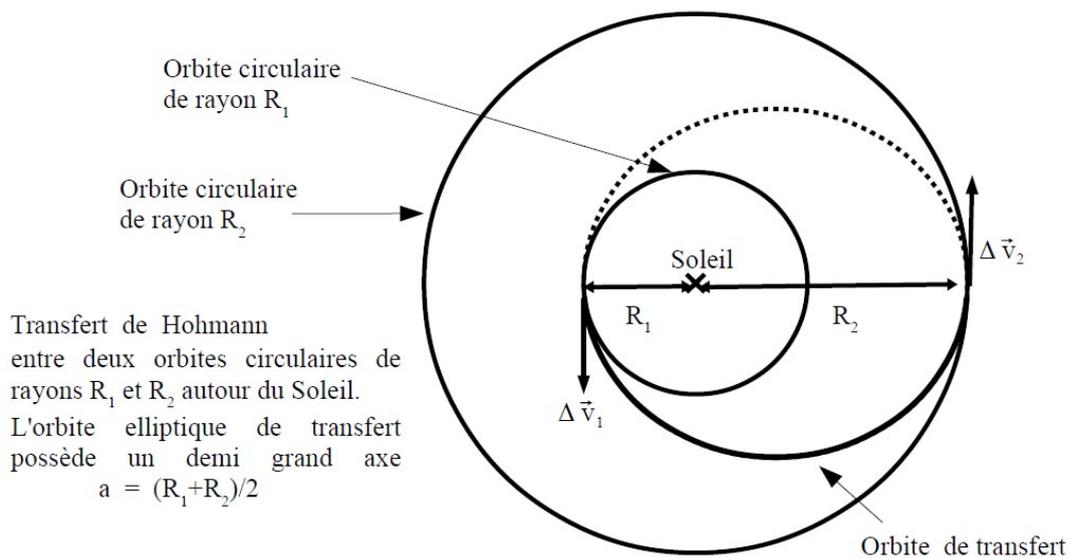
B.4 Montrer que le mouvement d'un astre en orbite autour du Soleil est plan.

B.5 On suppose que le mouvement de la Terre autour du Soleil est circulaire. Montrer que le mouvement est uniforme et retrouver l'expression (et la valeur) de la vitesse de la Terre.

B.6 On note ω la vitesse angulaire de la Terre autour du Soleil. Donner la valeur de ω puis retrouver la valeur numérique de la vitesse de la Terre.

Budget énergétique pour transfert orbital

Une façon simple d'envoyer un engin spatial d'une orbite circulaire à une autre (coplanaire) est de lui faire parcourir une orbite temporaire de transfert elliptique. Cette trajectoire est tangente aux orbites de départ et d'arrivée. Elle est appelée orbite de transfert de Hohmann. Deux impulsions sont nécessaires pour effectuer ce transfert. Une première impulsion engendre une variation de vitesse Δv_1 (voir figure ci-dessous) ce qui permet le passage de l'orbite circulaire de départ vers l'orbite elliptique de transfert. Une seconde impulsion, associée à une variation de vitesse Δv_2 , permet le passage de l'orbite de transfert vers l'orbite d'arrivée.



On indique que l'énergie mécanique d'un objet de masse m en orbite elliptique autour d'un corps de masse M est donnée par : $E_m = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{a}$ où a est le demi-grand axe de l'ellipse.

B.7 En utilisant le raisonnement de la question **B.5**, rappeler l'expression de la vitesse v_1 en fonction de G , M_s et R_1 pour la trajectoire circulaire de rayon R_1 .

B.8 Exprimer l'énergie mécanique sur l'orbite de transfert elliptique en fonction de v_1 , Δv_1 , G , M_s , m et R_1 . En déduire que l'expression du paramètre Δv_1 permettant de passer d'une orbite circulaire de rayon R_1 à une orbite elliptique de demi grand axe $a = \frac{R_1 + R_2}{2}$ est :

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM_S}{R_1}} \left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2}} - 1 \right)$$

Le lanceur Ariane 5G+ utilisé pour la mission place dans un premier temps Rosetta sur une orbite héliocentrique de même rayon que celle de la Terre. La comète 67P/TG possède une trajectoire elliptique autour du Soleil dont le demi grand axe est de 3,5 ua. On supposera que la Terre possède une orbite quasi circulaire. On souhaite évaluer la valeur de Δv permettant de rejoindre la comète.

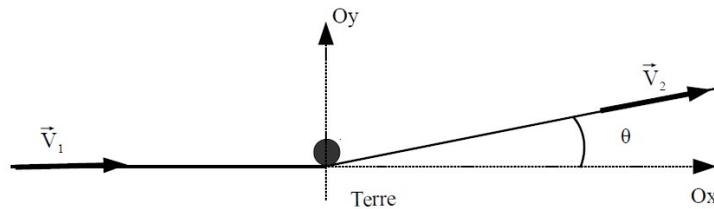
B.9 Le périhélie de la comète, c'est à dire le point de la trajectoire le plus proche du Soleil est de l'ordre de 1 ua. On envisage une injection directe dans l'orbite de la comète depuis l'orbite circulaire de la Terre. Déterminer la valeur Δv nécessaire à cette manœuvre.

Cette grandeur (appelée aussi budget Δv) permet de déterminer la masse de carburant nécessaire aux différentes manœuvres. En pratique, lorsque plusieurs manœuvres sont nécessaires, chacune associée à une valeur Δv_i , le budget Δv correspond alors à la somme de ces dernières. Pour assurer le transfert, on peut montrer qu'il faut une masse de carburant de près de 16 tonnes. La masse de la sonde au décollage serait alors de 17 tonnes ce qui excède largement les capacités du lanceur (7 tonnes). Il n'est donc pas envisageable pour la sonde d'atteindre directement l'orbite de la comète Tchourioumov-Guérassimenco.

Utilisation de l'assistance gravitationnelle

Afin de contourner les problèmes liés à la quantité limitée de carburant, la sonde Rosetta a utilisé une trajectoire permettant d'exploiter l'effet de fronde gravitationnelle (appelé aussi assistance gravitationnelle). Cette stratégie a permis à la sonde d'acquérir de la vitesse en limitant l'utilisation de carburant. En contre-partie, la durée de la mission devient plus longue...

Rosetta a utilisé trois assistances gravitationnelles en passant à proximité de la Terre. On propose dans cette question une étude simplifiée d'une assistance gravitationnelle. On se place dans le référentiel géocentrique appelé R_T . La sonde arrive de l'infini (c'est à dire hors de la zone d'influence gravitationnelle de la Terre) avec une vitesse \vec{V}_1 dans le référentiel R_T . La sonde passe à proximité de la Terre puis s'éloigne ensuite à l'infini avec une vitesse asymptotique \vec{V}_2 (figure ci-dessous).



B.10 Montrer que l'on a $V_1 = V_2$.

B.11 On posera $V = V_1 = V_2$. Les vitesses \vec{v}_1 et \vec{v}_2 de la sonde dans le référentiel héliocentrique vérifient la loi de composition des vitesses : $\vec{v}_1 = \vec{V}_1 + \vec{v}_T$ et $\vec{v}_2 = \vec{V}_2 + \vec{v}_T$. On suppose que dans le référentiel héliocentrique la vitesse de la Terre \vec{v}_T est dirigée suivant la direction Oy de la figure ci-dessus. Exprimer les vitesses \vec{v}_1 et \vec{v}_2 en fonction de V , v_T et θ dans la base $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ où \vec{u}_x et \vec{u}_y sont les vecteurs unitaires.

B.12 En déduire l'expression de la variation Δv de la valeur de la vitesse \vec{v} de la sonde dans le référentiel héliocentrique à l'issue de son passage à proximité de la Terre en fonction de v_T , V et θ . Donner une estimation de Δv en prenant $V = 5 \text{ km.s}^{-1}$ et $\theta = 45^\circ$ (La valeur de v_T a été déterminée à la question B.5).

B.13 Pour quelle raison selon vous, l'usage de l'assistance gravitationnelle augmente-t-il la durée du voyage vers la comète cible par rapport à une trajectoire directe ?

Problème 2 Sous-marin

On s'intéresse dans cet exercice à un sous-marin. Le référentiel terrestre est supposé galiléen et le champ de pesanteur uniforme.

Les données nécessaires sont rassemblées ci-dessous :

- pression atmosphérique : $P_{atm} = 1,010^5 \text{ Pa}$,
- masse volumique de l'eau de mer à la surface $\rho(0) = \rho_0 = 1,03.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$,
- champ de pesanteur terrestre : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$,
- masse du sous-marin (hors masse du fluide dans les ballasts) : $M = 1,40.10^7 \text{ kg}$,
- longueur du sous-marin : $L = 138 \text{ m}$,
- rayon du sous-marin (rayon de la coque extérieure) : $R = 6,00 \text{ m}$.

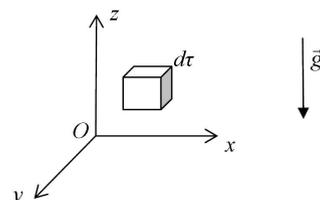
A Relation entre pression et profondeur dans l'eau de mer

A.1 On s'intéresse à un volume élémentaire $d\tau = dx dy dz$ d'eau de mer à l'équilibre (figure ci-dessous). On notera $P(x, y, z)$ la pression de l'eau en un point de coordonnées (x, y, z) .

Citer les forces s'exerçant sur ce volume élémentaire.

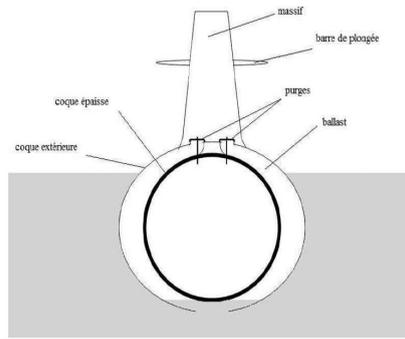
En traduisant l'équilibre de ce volume $d\tau$, montrer que la pression ne dépend pas des coordonnées x et y .

Donner alors l'expression de la résultante des forces s'exerçant sur $d\tau$ en fonction de $g, \rho(z), P(z), P(z + dz), dx, dy, dz$ et \vec{e}_z vecteur unitaire de l'axe (Oz) ascendant. En déduire la relation fondamentale de la statique des fluides $\frac{dP}{dz} = -\rho g$.



A.2 On suppose que l'eau de mer est un fluide indilatable, incompressible et homogène (occupant le demi-espace $z < 0$). Déterminer l'expression de la pression $P(z)$ à la cote z en fonction de ρ, g, z et $P_0 = P(z = 0)$. Calculer numériquement la pression P_{300} à 300 m de profondeur, en prenant $P_0 = P_{atm}$ et $\rho = \rho_0$.

B Utilisation des ballasts



Pour permettre au sous-marin de monter et de descendre, un système de ballasts pouvant se remplir d'eau ou d'air permet de modifier sa masse. Les ballasts sont des réservoirs situés entre la coque extérieure et la coque épaisse des sous-marins (figure ci-dessus).

On considère toujours l'eau de mer homogène, indilatable et incompressible, de masse volumique uniforme égale à ρ_0 .

B.1 On suppose dans cette question que le sous-marin flotte à la surface de l'eau. Les ballasts sont alors remplis d'air. En négligeant la poussée d'Archimède dans l'air ainsi que le poids de l'air contenu dans les ballasts, donner la relation entre le volume total immergé du sous-marin V_{imm} , sa masse M et la masse volumique de l'eau de mer ρ_0 .

B.2 On modélise le sous-marin par un cylindre de longueur L et de rayon R . Donner l'expression du rapport $\frac{V_{imm}}{V}$ où V est le volume total du sous-marin ainsi modélisé, en fonction de M , ρ_0 , L et R . Effectuer l'application numérique.

B.3 Expliquer qualitativement ce qui se passe quand on remplace progressivement l'air contenu dans les ballasts par de l'eau de mer.

B.4 Le sous-marin est en immersion quand les ballasts sont entièrement remplis d'eau de mer. La profondeur à laquelle il se trouve est fixée.

Déterminer l'expression du volume des ballasts V_b en fonction de M , V et de la masse volumique de l'eau de mer ρ_0 . Calculer numériquement le volume des ballasts V_b .

B.5 Expliquer qualitativement pourquoi la coque intérieure doit être épaisse et très résistante, alors que la coque extérieure est plus mince et légère.

Problème 3 Étude d'une turbine à combustion

On se propose d'étudier dans ce problème le fonctionnement d'une turbine à combustion (ou turbine à gaz). Elles fonctionnent habituellement selon un cycle ouvert selon le schéma de la figure 1.

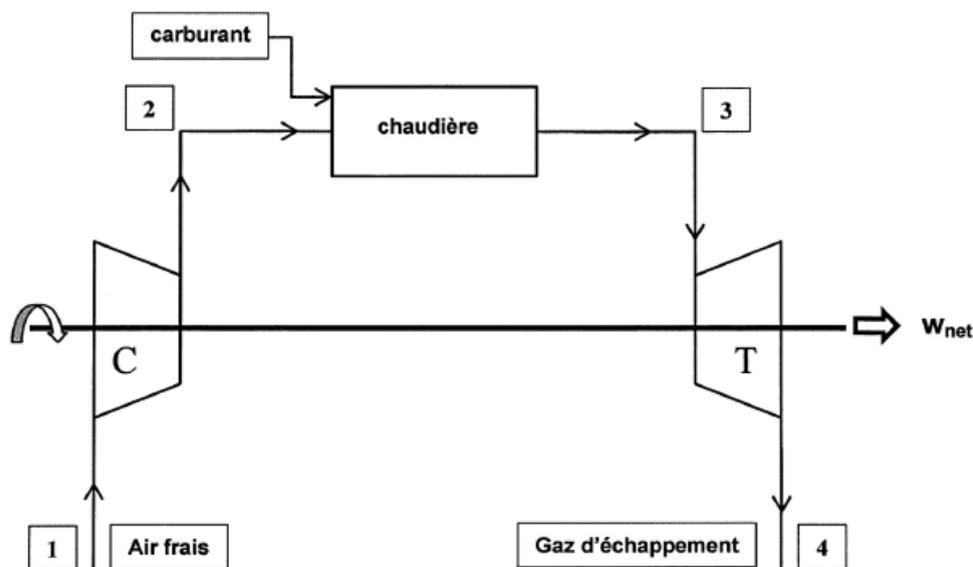


FIGURE 1 – Principe de fonctionnement d'une turbine

L'air frais pris à l'atmosphère est comprimé à haute pression dans le compresseur C puis il est admis dans la chambre de combustion (chaudière). Les gaz chauds résultant de la combustion se détendent alors dans la turbine T avant d'être évacués à l'atmosphère sous forme de gaz d'échappement.

Le compresseur et la turbine sont montés sur le même arbre permettant de récupérer un travail noté w_{net} , travail net récupéré pour l'admission d'un kilogramme d'air frais par seconde.

A Préliminaires

Considérons une machine thermodynamique ouverte telle que présentée sur la figure 2. Le fluide s'écoule en régime permanent avec un débit massique noté D . Il entre dans la machine à une altitude z_e dans les conditions de pression et température (P_e, T_e) avec une vitesse d'écoulement c_e .

Il sort de la machine à une altitude z_s avec une vitesse c_s dans les conditions de pression et température (P_s, T_s) .

Les canalisations d'entrée et de sortie de la machine sont calorifugées. Le fluide ne peut échanger de chaleur avec l'extérieur que lorsqu'il se trouve dans la machine.

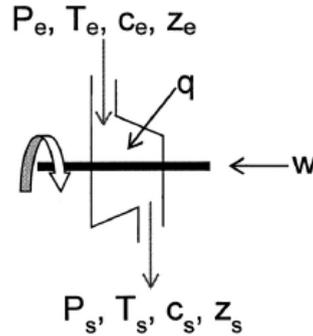


FIGURE 2 – Schéma de fonctionnement d'une machine thermodynamique

A.1 Montrer que le premier principe de la thermodynamique appliqué à un système que vous préciserez soigneusement, permet d'établir l'expression suivante :

$$[(h_s - h_e) + \frac{1}{2}(c_s^2 - c_e^2) + g(z_s - z_e)] = q + w$$

avec

- h , enthalpie massique du fluide ;
- q , transfert thermique massique reçu par le fluide de l'extérieur lorsqu'il est dans la machine
- w , travail massique indiqué reçu par le fluide de l'extérieur lorsqu'il traverse la machine ;

w et q étant pris comme des grandeurs algébriques.

A.2 Par la suite, on sera amené à étudier un écoulement d'air supposé gaz parfait, non pesant et de variation d'énergie cinétique négligeable. On notera alors c_{pm} et c_{vm} les capacités thermiques massiques à pression et volume constants. Elles seront considérées indépendantes de la température et de rapport :

$$\gamma = \frac{c_{pm}}{c_{vm}}$$

En appliquant les hypothèses précédentes et à partir de l'expression démontrée dans la question 1, proposez une expression simplifiée faisant intervenir les températures d'entrée et de sortie du fluide.

A.3 On note R la constante molaire des gaz parfaits et M la masse molaire de l'air. Déterminer c_{pm} et c_{vm} en fonction de R , M et γ .

A.4 Pour l'air, on prend $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ et $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$. Calculer c_{pm} et c_{vm} .

B Modélisation idéale du cycle : cycle de Joule

Le cycle ouvert présenté en figure 1 peut être modélisé comme un cycle fermé. Ce cycle est présenté sur la figure 3.

Les évolutions de compression et de détente restent inchangées. Le phénomène de combustion est remplacé par une évolution d'échange de chaleur à pression constante avec une source de chaleur externe. L'échappement des gaz brûlés et l'admission d'air frais sont remplacés par une évolution d'échange de chaleur à pression constante avec le milieu extérieur.

L'air subit une succession de 4 évolutions réversibles au cours du cycle :

- au point 1, l'air entre dans le compresseur pour y subir **une compression isentropique** jusqu'au point 2.
- entre les points 2 et 3, l'air échange de la chaleur avec un fluide extérieur dans un échangeur de chaleur **isobare** modélisant la chaudière.
- au point 3, l'air entre dans la turbine pour y subir **une détente isentropique** jusqu'au point 4.
- entre les points 4 et 1, l'air échange de la chaleur avec l'atmosphère dans un échangeur de chaleur **isobare**. L'air du cycle est ainsi refroidi.

B.1 On note v le volume massique de l'air. Représenter dans un diagramme de Clapeyron (P, v) le cycle subi par l'air. On précisera les points 1, 2, 3 et 4, et le sens du parcours du cycle.

On donne le cycle dans le diagramme (T, s) où s est l'entropie massique de l'air en figure 4.

On rappelle que pour un gaz parfait la variation d'entropie au cours d'une transformation s'écrit $\Delta S =$

$$mc_{pm} \ln \frac{T}{T_0} - nR \ln \frac{P}{P_0}$$

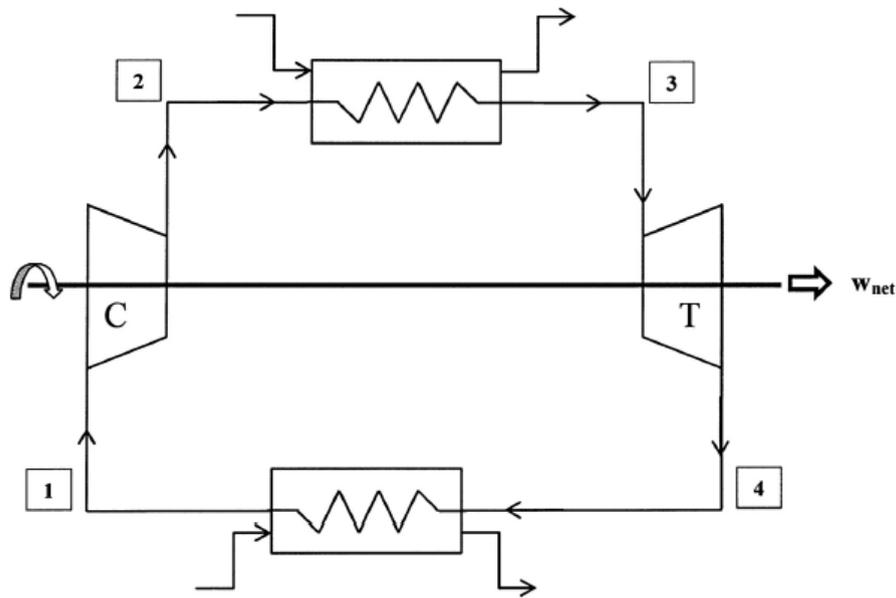


FIGURE 3 – Modélisation de la turbine à gaz par un cycle fermé

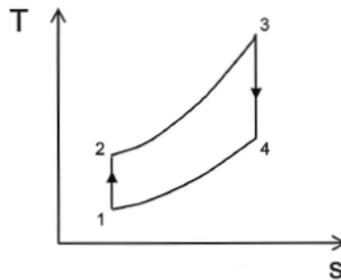


FIGURE 4 – Diagramme (T, s) du cycle étudié

B.2 En déduire qu'une évolution isobare se représente comme une exponentielle conformément au cycle tracé dans le diagramme (T, s) de la figure 4.

C Détermination des grandeurs énergétiques

Par la suite, on notera toute grandeur relative au point i du cycle X_i . Par exemple, la température du point 1 est notée T_1 .

C.1 Déterminer les transferts thermiques subis par l'air dans les deux échangeurs de chaleur que l'on notera respectivement q_{23} et q_{41} en fonction des différentes températures des points 1, 2, 3 et 4 du cycle et des capacités thermiques de l'air.

C.2 Déterminer le travail massique, noté w_{12} , reçu par l'air en traversant le compresseur en fonction des différentes températures des points 1, 2, 3 et 4 du cycle et des capacités thermiques de l'air.

C.3 Déterminer le travail massique, noté w_{34} , reçu par l'air en traversant la turbine en fonction des différentes températures des points 1, 2, 3 et 4 du cycle et des capacités thermiques de l'air.

C.4 Exprimer w_{net} (défini en début d'énoncé) en fonction des travaux w_{12} et w_{34} .

C.5 En déduire une expression de w_{net} uniquement en fonction des différentes températures des points 1, 2, 3 et 4 du cycle et des capacités thermiques de l'air.

D Expression du rendement et optimisation

D.1 Définir le rendement η de l'installation.

D.2 Montrer que l'on peut le mettre sous la forme :

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

D.3 On introduit le taux de compression défini par :

$$\tau = \frac{P_2}{P_1}$$

Montrer alors que l'on peut mettre le rendement sous la forme :

$$\eta = 1 - \frac{1}{z}$$

avec z que vous exprimerez uniquement en fonction du taux de compression τ et du rapport des capacités thermiques à pression et volume constant γ .

D.4 D'après la question précédente, sur quelle grandeur peut-on influencer pour augmenter le rendement ? Au cours d'une étude technico-commerciale du dispositif, quel autre élément faudra-t-il prendre en compte pour concevoir la turbine à gaz ?

E Optimisation du travail récupéré sur l'arbre

On impose le fonctionnement de cette turbine à gaz à T_1 fixé à 300 K (température de l'air pris à l'atmosphère), T_3 fixé à 1000 K (grandeur limitée par la résistance des matériaux des aubes de la turbine). T_2 et T_4 , quant à elles, varient selon le rapport de compression choisi.

E.1 Dans le diagramme de Clapeyron ; que représente l'aire du cycle subi par le fluide ? On justifiera avec soin la réponse.

E.2 Par le même type de raisonnement, en déduire que comme les transformations sont réversibles, l'aire du cycle subi par le fluide en diagramme (T, s) représente le transfert thermique échangé avec l'extérieur sur le cycle.

E.3 Pourquoi alors obtient-on par simple lecture de l'aire du cycle subi par le fluide en diagramme (T, s) , le travail net récupéré sur l'arbre w_{net} .

E.4 Les températures des points 1 et 3 du cycle étant fixées ainsi que la pression entre les points 4 et 1 du cycle, représenter le cycle de Joule (en diagramme (T, s)), dans les deux cas suivants :

a un rapport de compression tel que T_2 se rapproche de la valeur de T_3 ;

b un rapport de compression tel que T_2 se rapproche de la valeur de T_1 .

E.5 En déduire que w_{net} passe forcément par un maximum.

E.6 Exprimer le travail net w_{net} uniquement en fonction de c_{pm} , T_3 , T_1 et z .

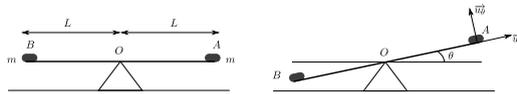
E.7 Déterminer par le calcul la valeur de z rendant w_{net} maximal uniquement en fonction de T_3 et T_1 (T_1 et T_3 étant fixées).

E.8 En déduire la valeur maximale que peut atteindre w_{net} . On exprimera w_{net} uniquement en fonction de c_{pm} , T_3 et T_1 .

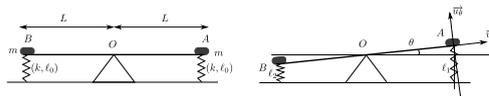
E.9 Calculer numériquement w_{net} , T_2 , T_4 et le rendement dans ce cas de figure.

Problème 4 Un jeu d'enfant !

Une barre homogène de longueur $2L$ de moment d'inertie J rapport à l'axe (Oz) et de masse m_b est liée en O à un support fixe par une liaison pivot parfaite. Deux enfants de même masse m que l'on considérera comme ponctuels viennent s'asseoir en A et en B .



1. Montrer que le système {barre+enfants} est toujours à l'équilibre quel que soit l'angle θ .
2. On schématise désormais une balançoire de type trébuchet à ressort où on a rajouté au système précédent deux ressorts identiques verticaux de raideur k , et de longueur à vide ℓ_0 identiques fixés entre le sol et les extrémités A et B de la barre. Lorsque la barre est à l'horizontale la longueur des ressorts est égale à leur longueur à vide. Dans toute la suite, on se limitera aux petits angles θ , et on admettra que les altitudes de A et B par rapport au sol sont données par : $\ell_1 = \ell_0 + L\theta$ et $\ell_2 = \ell_0 - L\theta$.



- 2.a. En supposant les tensions des ressorts verticales, montrer que le moment résultant des forces élastiques par rapport au point O s'écrit $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{el}) = -2kL^2\theta\vec{u}_z$.
- 2.b. Étudier alors l'équilibre du système {barre+enfants}.
- 2.c. Établir l'équation différentielle du mouvement en appliquant le théorème du moment cinétique au système {barre+enfants}.
- 2.d. Exprimer alors la période propre des petites oscillations libres du système.
- 2.e. Donner l'expression de l'énergie mécanique du système. Que peut-on dire de cette énergie ? En posant θ_{max} la valeur maximale de θ , déterminer l'expression de l'énergie mécanique.
- 2.f. Retrouver l'équation différentielle du mouvement à partir de la question précédente.
- 2.g. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'enfant placé en A , calculer les composantes R_r et R_θ de la réaction de la barre en fonction de θ et θ_{max} .
- 2.h. Écrire l'équation qui donne l'angle θ auquel l'enfant est susceptible de décoller. Commenter.