Éléments de correction du DM n° 1

Analyse dimensionnelle

Flexion d'un spaghetto

1. On réalise une analyse dimensionnelle : $[y] = [K][F]^\alpha[L]^\beta[d]^\delta[E]^\gamma$ avec $[y] = L$, $[K] = 1$, $[F] = MLT^{-2}$, $[L] = L$, $[d] = L$ et $[E] = ML^{-1}T^{-2}$. On en déduit l'équation aux dimensions suivante :

$$L = M^\alpha L^\alpha T^{-2\alpha} L^{\beta+\delta} M^\gamma L^{-\gamma} T^{-2\gamma} = L^{\alpha+\beta+\delta-\gamma} M^{\alpha+\gamma} T^{-2\alpha-2\gamma}$$

et le système :

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta + \delta - \gamma \\ 0 = \alpha + \gamma \\ 0 = -2\alpha - 2\gamma \end{cases}$$

Les deux relations indépendantes sont :

$$\boxed{1 = \alpha + \beta + \delta - \gamma \quad \text{et} \quad 0 = \alpha + \gamma}$$

On ne peut pas résoudre ce système puisqu'il y a 4 inconnues et seulement deux équations.

2. 2.a. La force F est le poids de la masse m donc $\boxed{F = mg}$.

2.b. On nous propose $\alpha = -1$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ ou $\alpha = 3$. La représentation graphique sur laquelle les points semblent les plus alignés est celle donnant y en fonction de F. On prend donc $\underline{\alpha = 1}$.

2.c. On mesure la pente pour chaque spaghetto. On obtient :
- pour le spaghetto de longueur $L = 20\,\text{cm}$: $\text{pente}_{20} = 0{,}14\,\text{m}\,\text{N}^{-1}$,
- pour le spaghetto de longueur $L = 15\,\text{cm}$: $\text{pente}_{15} = 0{,}059\,\text{m}\,\text{N}^{-1}$.

Par identification avec la loi de puissance fournie : $\text{pente} = KL^\beta d^\delta E^\gamma$. Ainsi $\dfrac{\text{pente}_{20}}{\text{pente}_{15}} = \left(\dfrac{L_{20}}{L_{15}}\right)^\beta$.

Donc $\boxed{\beta = \dfrac{\ln\left(\dfrac{\text{pente}_{20}}{\text{pente}_{15}}\right)}{\ln\left(\dfrac{L_{20}}{L_{15}}\right)}}$.

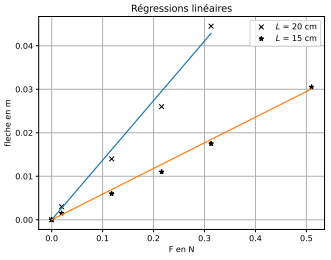
A.N. : $\beta = 2{,}9$. On retient donc la valeur entière $\underline{\beta = 3}$.

2.d. Avec le système obtenu à la question 1, on a $\boxed{\gamma = -\alpha}$ et $\boxed{\delta = 1 + \gamma - \alpha - \beta}$.
A.N. : $\underline{\gamma = -1}$ et $\underline{\delta = -4}$.

2.e. Expression finale : $\boxed{y = \dfrac{4}{3\pi}\dfrac{FL^3}{d^4E}}$.

2.f. Pour chaque spaghetto, $\text{pente} = KL^3d^{-4}E^{-1}$, donc $E = \dfrac{KL^3}{d^4\text{pente}}$. On en déduit

$$\boxed{E_{\text{moy}} = \frac{K}{2d^4}\left(\frac{L_{20}^3}{\text{pente}_{20}} + \frac{L_{15}^3}{\text{pente}_{15}}\right)}$$

A.N. : $\underline{E_{\text{moy}} = 1{,}9 \times 10^9\,\text{Pa} = 1{,}9\,\text{GPa}}$.

Pour information :