

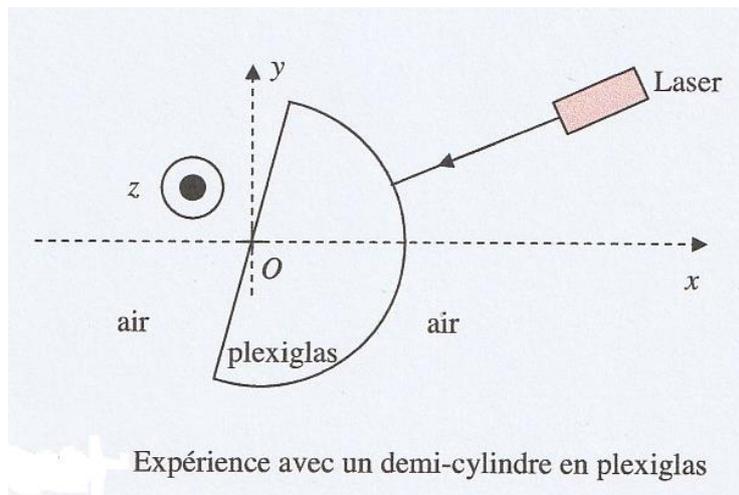
Problème 1 : La fibre optique

Dans toute cette partie, on notera $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ la célérité de la lumière dans le vide.

I. Généralités

I.1) Énoncer les lois de Snell-Descartes relatives à la réflexion et à la réfraction de la lumière en les accompagnant de schémas.

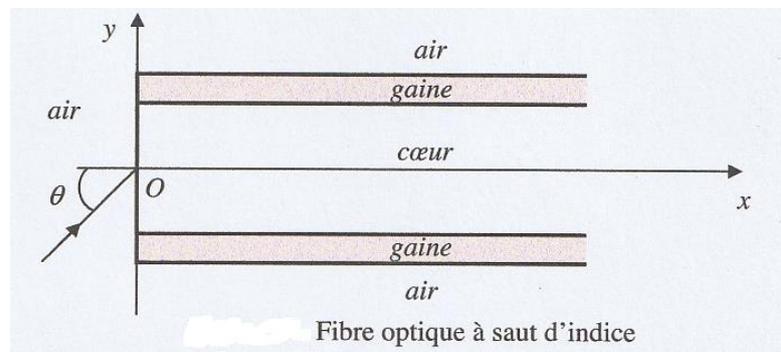
I.2) Lors d'une séance de travaux pratiques, on dispose d'un disque métallique gradué en degrés, d'un laser et d'un demi-cylindre de plexiglass dont la face plane est confondue avec un diamètre du disque métallique. La lumière du laser arrive sur la face courbe du demi-cylindre de plexiglass suivant un de ses rayons comme indiqué sur la figure ci-dessous. Le demi-cylindre peut pivoter sur le disque métallique autour de l'axe (Oz) , O étant le centre du disque.



Reproduire la figure ci-dessus et tracer les rayons réfractés et réfléchis issus du laser. Justifier vos tracés. Quel phénomène pourra être mis en évidence à l'occasion de cette expérience ? Pourquoi utiliser un laser comme source lumineuse ?

II. La fibre à saut d'indice

Une fibre optique à saut d'indice, représentée sur la figure ci-dessous est constituée d'un cœur cylindrique transparent d'indice $n_c = 1,50$ et de rayon r_c entouré d'une gaine transparente d'indice $n_g = 1,48$. L'axe Ox de la fibre est normal au dioptre air-cœur. En raison de la symétrie de révolution de la fibre autour de l'axe Ox , on se restreint à une étude dans le plan (xOy) .



II.1) Un rayon lumineux monochromatique se propageant dans l'air, situé dans le plan (xOy) pénètre dans le cœur de la fibre en O avec un angle d'incidence θ . Faites un schéma sur lequel vous représenterez le rayon réfracté dans le cœur de la fibre. On note I le point d'intersection de ce rayon avec le dioptre

cœur-gaine. Justifier qu'il existe un angle limite en I , noté i_L à partir duquel le rayon lumineux subit une réflexion totale dans le cœur de la fibre optique. Exprimer i_L en fonction de n_c et de n_g .

II.2) On appelle angle d'acceptance, noté θ_L , l'angle d'incidence à l'entrée de la fibre pour lequel l'angle d'incidence sur le dioptré cœur-gaine est l'angle limite i_L . Montrer que :

$$n_a \cdot \sin \theta_L = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$$

Montrer que le rayon reste confiné dans le cœur si l'angle θ est inférieur à l'angle θ_L . Calculer la valeur de θ_L . L'indice de l'air vaut $n_a = 1,00$.

On considère maintenant une fibre optique de longueur L . Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ variable entre 0 et θ_L .

II.3) Quel est le rayon qui traverse le plus rapidement la fibre ? Exprimer la durée T_1 de parcours de ce rayon en fonction de L , c et n_c .

II.4) Quel est le rayon qui met le plus de temps à traverser la fibre ? Exprimer la durée T_2 de parcours de ce rayon en fonction de L , c , n_g et n_c .

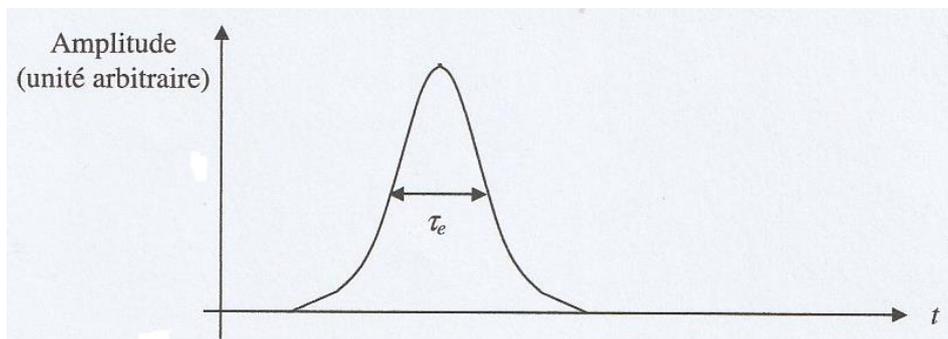
II.5) En déduire l'expression de l'intervalle de temps $\delta T = T_2 - T_1$ en fonction de L , c , n_g et n_c .

On pose : $\Delta = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{n_g}{n_c} \right)^2 \right)$ avec $\Delta \ll 1$. On rappelle que pour $x \ll 1$:

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x \dots \quad \text{au premier ordre en } x$$

Dans ces conditions, montrer que $\delta T = \frac{n_c L \Delta}{c}$ et calculer la valeur de δT pour $L = 10,0 \text{ km}$.

On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse de durée τ_e représentée sur la figure ci-dessous, formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris entre 0 et θ_L .



II.6) Reproduire la figure sur votre copie. Représenter l'allure de l'impulsion en sortie de fibre. Préciser sa durée approximative τ_s . On négligera ici tout phénomène d'absorption de la lumière par la fibre.

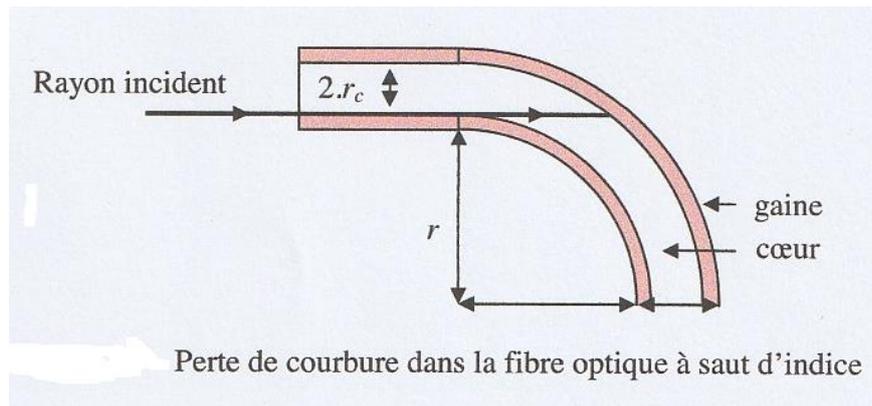
II.7) Le codage binaire de l'information consiste à envoyer des impulsions lumineuses, appelées bits, périodiquement avec une fréquence f . En supposant τ_e négligeable devant δT quelle est la fréquence maximale de transmission f_{max} qui empêche le recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre ?

II.8) En considérant L_{max} la longueur maximale de fibre optique qui permet d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions, on définit le produit $B = L_{max} \cdot f$ comme étant la bande passante de la fibre optique. Exprimer B en fonction de c , n_c et Δ . Expliquer l'intérêt d'introduire cette grandeur. Pour un débit de 100 Mbits par seconde, évaluer et commenter la longueur maximale de fibre optique que l'on peut utiliser pour transmettre le signal.

III. Contrainte mécanique exercée sur une fibre

Si la fibre peut-être courbée sans grand inconvénient mécanique, cette courbure peut néanmoins conduire à une perte de l'énergie guidée. En raisonnant sur la figure ci-dessous, expliquer la raison de cette perte dans une fibre à saut d'indice. En considérant un rayon pénétrant dans la fibre perpendiculairement à sa section, à la limite du bord inférieur, donner en fonction de n_c , n_g , r_c et r_g le rayon de la gaine, l'expression du rayon de courbure r à partir duquel la perte de courbure apparaîtra.

Calculer ce rayon en considérant que $r_c + r_g = 1,00$ mm, $r_c - r_g \approx 0$, $n_c = 1,50$ et $n_g = 1,48$.
Conclure.



Problème 2 : Capture d'empreintes digitales par réflexion totale

Il existe différentes technologies de capteurs d'empreinte digitale, c'est-à-dire de dispositifs permettant d'obtenir une image numérisée d'une empreinte digitale, le plus souvent à des fins d'identification. Certaines de ces technologies sont embarquées dans des smartphones. La technologie dite « capteur optique d'empreinte digitale » est très employée, elle repose sur le phénomène de réflexion totale frustrée qui est l'objet de cette étude.

Le doigt est posé à plat sur l'hypoténuse d'un prisme droit isocèle taillé dans un verre d'indice optique noté n . Il est éclairé par une diode laser de longueur d'onde λ_0 dans le vide. L'image de l'empreinte digitale à travers un système optique est formée sur un capteur CCD puis numérisée. La figure 2 décrit le schéma de principe de ce dispositif.



Figure 1 Capteur d'empreinte digitale (Wikimedia, Rachmaninoff, 2009-10-21)

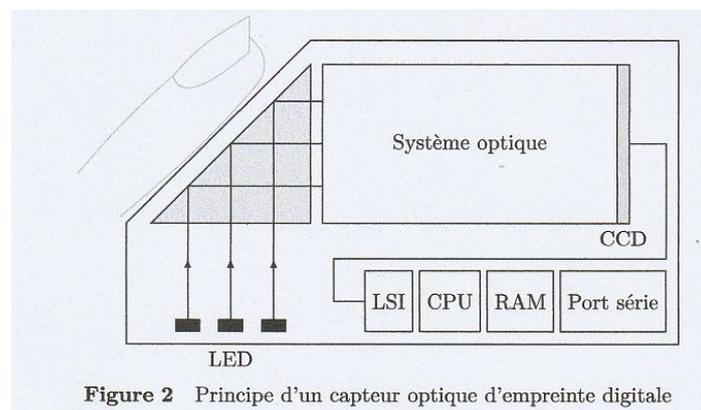


Figure 2 Principe d'un capteur optique d'empreinte digitale

En première approche, le système optique se résume à la traversée d'un dioptre (D) et d'une lentille convergente (L) (figure 3). Si A est un point objet de l'empreinte digitale, alors on note A_1 l'image de A à travers le dioptre (D) et A'_1 celle de A_1 à travers la lentille (L) :

$$A \xrightarrow{(D)} A_1 \xrightarrow{(L)} A'_1$$

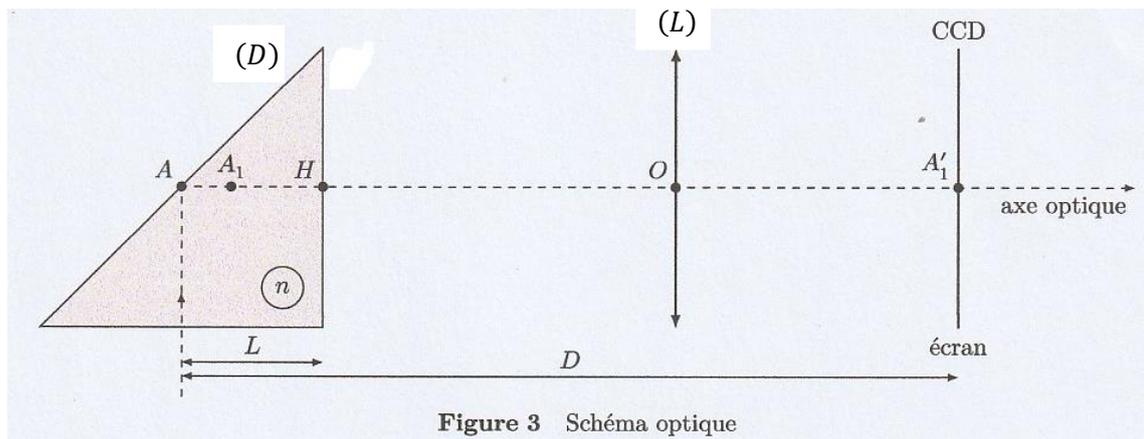


Figure 3 Schéma optique

On définit également les longueurs algébriques suivantes :

$$D_1 = \overline{A_1A'_1} \quad D = \overline{AA'_1} \quad p = \overline{OA_1} \quad p' = \overline{OA'_1}$$

L'objectif ici est de choisir la distance focale f' de la lentille et sa position, par exemple en déterminant p' . A cet effet, on donne $n = 1,5$; $L = 3,0 \text{ cm}$; $D = 10 \text{ cm}$ et le grandissement transversal $\gamma = \frac{p'}{p}$ du système optique.

- 1) Dans quelles conditions peut-on considérer qu'un système optique vérifie les conditions de Gauss ?
- 2) A l'aide des lois de Descartes et de la figure 4, montrer que, dans les conditions de Gauss, la relation de conjugaison entre A et A_1 par le dioptre plan formé par la face de sortie du prisme s'écrit :

$$\overline{HA_1} = \frac{1}{n} \overline{HA}$$

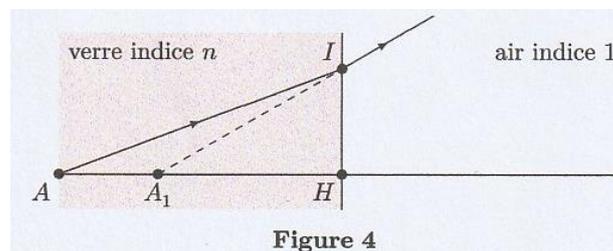


Figure 4

- 3) Exprimer p et p' en fonction de D_1 et de γ . Déterminer alors f' en fonction de D_1 et de γ à l'aide de la formule de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

- 4) A partir de la relation de Descartes, montrer qu'il faut que $D_1 \geq 4.f'$ pour observer l'image de A_1 sur l'écran.
- 5) Applications numériques. On suppose que $\gamma = -2,0$. A quelle distance place-t-on la lentille devant l'écran et quelle est sa focale ?