CLASSES DE PCSI 1 et 3 - Corrigé du D.L N°2 DE PHYSIQUE

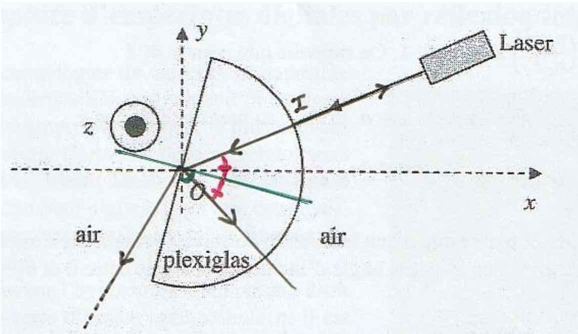
Problème 1 : La fibre optique

I. Généralités

I.1) Lois de Snell-Descartes :

- Le rayon réfléchi est symétrique au rayon incident par rapport à la normale : $i_1' = i_1$.
- Le rayon réfracté est lié au rayon incident par la loi des sinus : $n_1.\sin i_1 = n_2.\sin i_2$.

I.2) Rayons réfléchi et réfracté :

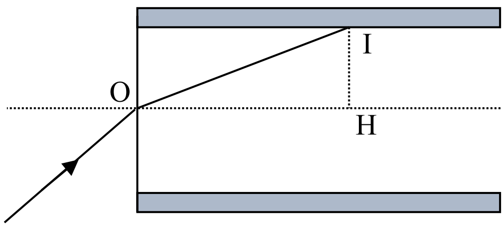


Expérience avec un demi-cylindre en plexiglas

Le rayon incident arrive sous incidence normale sur le dioptre cylindrique. En I, une partie de la lumière est réfléchi, l'autre est réfractée. Le rayon réfléchi est opposé au rayon incident. Le rayon réfracté est non dévié car confondu avec la normale. En O, le rayon subit encore une réflexion et une réfraction. Le rayon réfléchi est symétrique au rayon incident par rapport à la normale. Le rayon réfracté s'éloigne de la normale en passant dans l'air. Ceci est vérifié tant que l'angle d'incidence est inférieur à l'angle limite dans le plexiglass. Dès que l'angle d'incidence devient supérieur à l'angle limite, on peut observer le phénomène de réflexion totale dans le plexiglass. Le laser permet d'avoir un faisceau plus fin et plus intense. Le fait que le rayonnement soit monochromatique, il n'y a pas de dispersion.

II. La fibre à saut d'indice

II.1) Propagation du rayon lumineux dans la fibre optique :



En I, le rayon évolue vers un milieu moins réfringent. Il existe donc un angle limite i_L défini dans le milieu le plus réfringent. Si l'angle d'incidence en I est supérieur à i_L il y a réflexion totale dans le cœur de la fibre, et donc propagation guidée. L'angle limite est défini par :

$$\boxed{\sin i_L = \frac{n_g}{n_c}}$$

II.2) Dans le triangle OIH : $i + r = \frac{\pi}{2}$. Appliquons la loi des sinus en O : $n_a.\sin\theta = n_c.\sin r$. Avec $r = \frac{\pi}{2} - i$ la relation devient :

$$n_a.\sin\theta = n_c.\sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = n_c.\cos i$$

A la limite de réfraction : $i_L + r_L = \frac{\pi}{2}$ donc :

$$n_a.\sin\theta_L = n_c.\cos i_L$$

Avec $\sin i_L = \frac{n_g}{n_c}$:

$$n_a.\sin\theta_L = n_c.\sqrt{1-(\sin i_L)^2} = n_c.\sqrt{1-\left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}$$

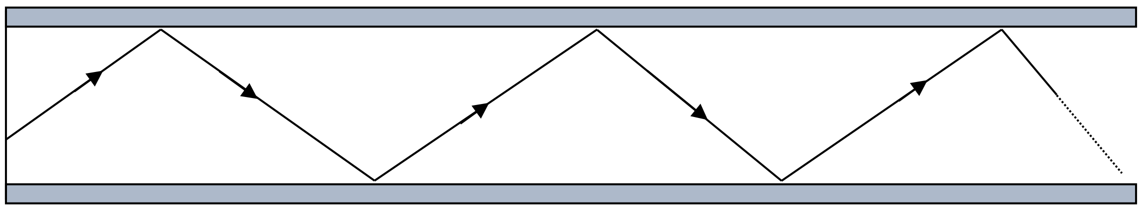
On vérifie que :

$$\boxed{n_a.\sin\theta_l = \sqrt{{n_c}^2 - {n_g}^2}}$$

Le rayon reste confiné dans le cœur de la fibre si $i > i_L$. Sachant $i_L + r_L = \frac{\pi}{2}$:

$$\boxed{\text{Si } i > i_L \text{ alors } r < r_L \text{ et } \theta < \theta_L}$$

Allure de la Propagation du rayon dans la fibre pour $i > i_L$:



A.N. : $\theta_l = 14{,}1\ °$.

II.3) Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ variable entre 0 et θ_L. Le rayon qui arrive sous incidence normale ($\theta = 0$) traverse le plus rapidement la fibre.

$$T_1 = \frac{L}{v}$$

Avec $v = \frac{c}{n_c}$:

$$\boxed{T_1 = \frac{n_c.L}{c}}$$

II.4) Le rayon qui met le plus de temps a traverser la fibre est celui pour lequel $\theta \to \theta_L$. Soit : $T_2 = \frac{d}{v}$ avec d distance parcourue dans la fibre par le rayon pour $\theta = \theta_L$. Par construction $d = \frac{L}{\sin i_L} = \frac{n_c.L}{n_g}$
On établit ainsi que :

$$\boxed{T_2 = \frac{{n_c}^2.L}{n_g.c}}$$

II.5) Expression de $\delta T = T_2 - T_1$:

$$\boxed{\delta T = \frac{n_c.L}{c}\left(\frac{n_c}{n_g} - 1\right)}$$

Avec $\Delta = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2\right)$ on peut poser que :

$$\frac{n_c}{n_g} = \frac{1}{\sqrt{1-2.\Delta}} = (1-2.\Delta)^{-\frac{1}{2}}$$

Avec $\Delta \ll 1$, en utilisant la relation proposée au premier ordre en Δ :

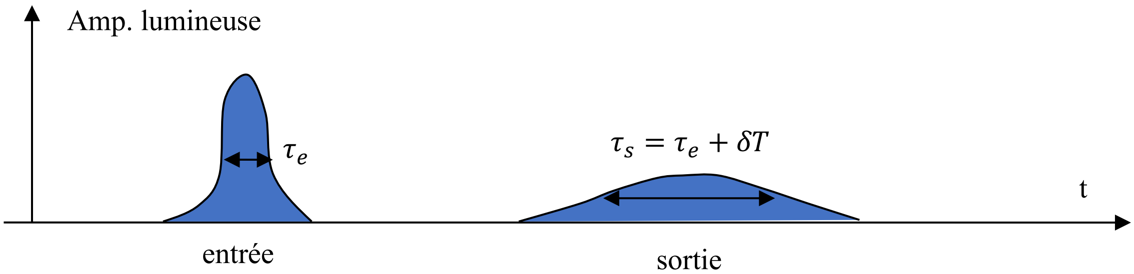
$$\frac{n_c}{n_g} = 1 + \Delta$$

On en déduit que :

$$\delta T = \frac{n_c.L}{c}\left(\frac{n_c}{n_g} - 1\right) = \frac{n_c.L.\Delta}{c}$$

A.N. : $\delta T = 662\ ns$

II.6) Evolution de l'impulsion dans la fibre : l'aire de l'amplitude lumineuse ne varie pas (on néglige toute dissipation lumineuse dans la fibre), mais l'impulsion subit un étalement temporel au cours de sa propagation.



II.7) Pour éviter tout problème de recouvrement des signaux, il faut que la période $T > \delta T$. Avec $f = \frac{1}{T}$; ceci implique que :

$$\delta T.f < 1$$

II.8) A la limite de recouvrement des deux impulsions : $\delta T_{max} = \frac{1}{f}$ on en déduit que :

$$B = L_{max}.f = \frac{L_{max}}{\delta T_{max}} = \frac{c}{n_c.\Delta}$$

B correspond à la limite au-delà de laquelle il n'est plus possible de transmettre de l'information dans cette fibre.

A.N. : $B = 10{,}1\ \mathrm{MHz.km}$.
Avec $B = L_{max}.F$ on établit que : $L_{max} = 101\ m$ ce qui est vraiment faible pour une FO.

III. Contrainte mécanique exercée sur une fibre

Sous incidence normale, la perte de courbure apparaitra dès que l'angle d'incidence en I devient égale à l'angle limite i_L. En explicitant à partir de la figure proposée :

$$\sin i_L = \frac{r}{r + 2.r_c} = \frac{n_g}{n_c}$$

En négligeant l'épaisseur de la gaine ($r_g - r_c \approx 0$). On établit ainsi que :

$$r = \frac{2.r_c.n_g}{n_c - n_g}$$

A.N. : Avec $r_g - r_c \approx 0$, on peut faire l'hypothèse que $2.r_c = r_c + r_g = 1{,}00$ mm soit $r = 7{,}40\ cm$. Il faut vraiment imposer des contraintes mécaniques sévères pour que la fibre à saut d'indice subisse des pertes de courbure.

Problème 2 : Capture d'empreintes digitales par réflexion totale

1) On considère qu'un système optique respecte les conditions de Gauss si les rayons lumineux sont peu inclinés et peu écartés par rapport à l'axe optique.

2) Appliquons la loi des sinus en I : $n.\sin r = n_a.\sin i = \sin i$. Dans les conditions de Gauss, cette relation devient la relation de Kepler de la réfraction : $i = n.r$

Exprimons les tangentes de ces angles, avec les conventions indiquées ci-dessous dans les conditions de Gauss :

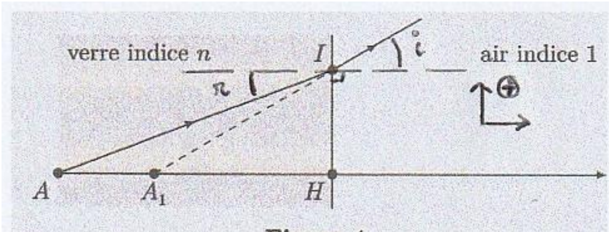


Figure 4

$$\tan r = -\frac{\overline{HI}}{\overline{HA}} = r$$
$$\tan i = -\frac{\overline{HI}}{\overline{HA_1}} = i$$

En explicitant ; on établit que :

$$-\frac{\overline{HI}}{\overline{HA_1}} = n.\left(-\frac{\overline{HI}}{\overline{HA}}\right)$$

On vérifie que :

$$\boxed{\overline{HA_1} = \frac{1}{n}\overline{HA}}$$

3) Avec $D_1 = \overline{A_1A_1{}'}$ on établit que : $D_1 = \overline{A_1A_1{}'} = \overline{A_1O} + \overline{OA_1{}'} = p' - p$ soit :

$$p' - p = D_1 \quad et \quad \gamma = \frac{p'}{p}$$

En divisant par p la première relation ; on établit que :

$$\gamma - 1 = \frac{D_1}{p}$$

Soit :

$$\boxed{p = \frac{D_1}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad p' = \frac{\gamma.D_1}{\gamma - 1}}$$

Exprimons maintenant f' en fonction de D_1 et de γ à l'aide de la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma.D_1} - \frac{\gamma - 1}{D_1} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{\gamma - 1}{D_1}\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) = \frac{1}{f'}$$

On établit que :

$$\boxed{f' = \frac{-\gamma.D_1}{(\gamma - 1)^2}}$$

4) En explicitant cette relation :

$$(\gamma - 1)^2 = -\frac{\gamma.D_1}{f'}$$

On établit le polynôme du second ordre en γ :

$$\gamma^2 + \gamma.\left(\frac{D_1}{f'} - 2\right) + 1 = 0$$

Discriminant : $\Delta = \left(\frac{D_1}{f'} - 2\right)^2 - 4$. Pour que ce polynôme ait des solutions réelles il faut que $\Delta \geq 0$. Ceci implique que :

$$D_1 \geq 4.f'$$

Remarque : on peut retrouver cette condition à partir de la relation de Descartes exprimée en fonction de p' et D_1 (cf cours).

5) Déterminons D_1 :

$$D_1 = D - \overline{AH} + \overline{A_1H} = D - L + \frac{L}{n}$$

$$D_1 = D - \left(\frac{n-1}{n}\right).L$$

A.N. : $D_1 = 9{,}0\ cm$ et $\gamma = -2{,}0$ donc $p' = \frac{\gamma.D_1}{\gamma-1} = 6{,}0\ cm$ et $f' = \frac{-\gamma.D_1}{(\gamma-1)^2} = 2{,}0\ cm.$