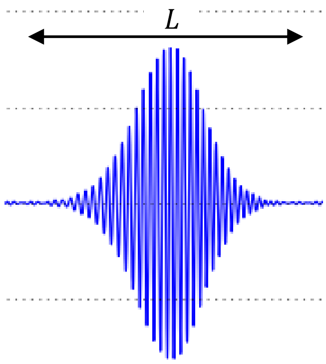
Chap 1 : Théorème de Fourier et fonction harmonique

Introduction : Dans les chapitres précédents, nous avons étudié quelques propriétés de la lumière décrites dans le cadre de l'optique géométrique. A cette occasion, nous avons rappelé que l'optique géométrique est une approximation de l'optique ondulatoire satisfaisante tant que les propriétés du milieu varient peu devant la longueur d'onde ($a \ll \lambda$).
Quand cette condition n'est pas vérifiée, la lumière manifeste son caractère ondulatoire. Il est alors possible d'observer des interférences, de la diffraction ou des phénomènes de battements lumineux.

Comme la lumière, de nombreux phénomènes physiques peuvent être décrit par des ondes : ondes sonores, ondes sismiques, la houle ou les signaux électriques…
Dans ce chapitre, nous allons étudier les grandeurs physiques qui permettent de décrire ces phénomènes ondulatoires.

I : Théorème de Fourier

1) Notion de paquet d'onde



Une onde est un phénomène physique qui se propage dans l'espace au cours du temps. Ce phénomène est borné dans l'espace et dans le temps c'est-à-dire qu'il possède **un début** et **une fin**… c'est pourquoi on définit le concept de « paquet d'onde ».

A un instant t donné, un paquet d'onde possède une longueur finie notée L qui correspond à l'étendue spatiale du « paquet d'onde ».

2) Théorème de Fourier
Quelle que soit la complexité du signal, s'il est périodique, il peut être décomposé comme **une somme de fonctions harmoniques** par application du théorème de Fourier.

Théorème de Fourier : soit $s(t)$ une fonction périodique de période T. Cette fonction $s(t)$ peut être décomposée en une somme de fonctions harmoniques :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n.\cos(\omega_n.t + \varphi_n)$$

avec $n \in N$

Dans cette expression :

A_0 : est la composante continue du signal, qui correspond à sa valeur moyenne.

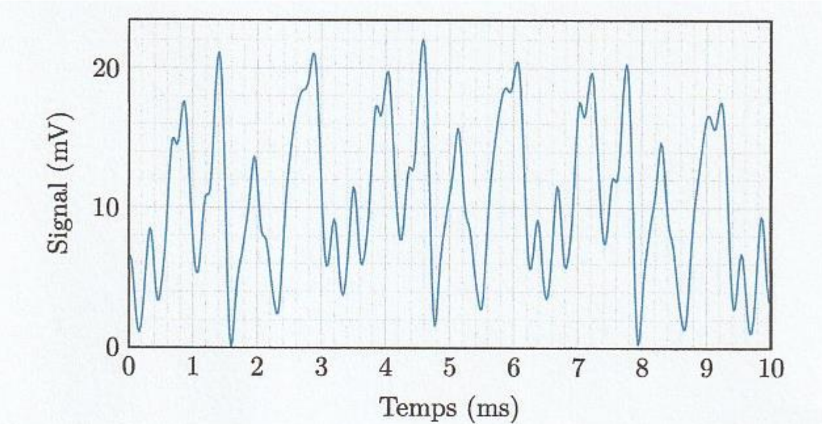
A_n : est l'amplitude de la fonction **harmonique de rang** $\boldsymbol{n}$, $\omega_n = n.\omega$ est sa pulsation et φ_n sa phase à l'origine des temps.

$\omega = 2.\pi/T$: est la pulsation fondamentale (avec T période du signal $s(t)$).

Comme nous l'avons vu pour la lumière le signal $s(t)$ est caractérisé par son spectre en amplitude ou en phase. Le spectre en amplitude représente l'amplitude des différentes composantes (continue, fondamental et harmoniques) qui constituent le signal en fonction de la fréquence (cf chap.1 d'optique).

3) Exercice : étude d'un accordeur de guitare (extrait pb CC-2019)

On enregistre le son émis par une corde de guitare. La figure ci-dessous représente la tension mesurée à l'aide d'un micro à la sortie d'une guitare électrique :



-a- Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.

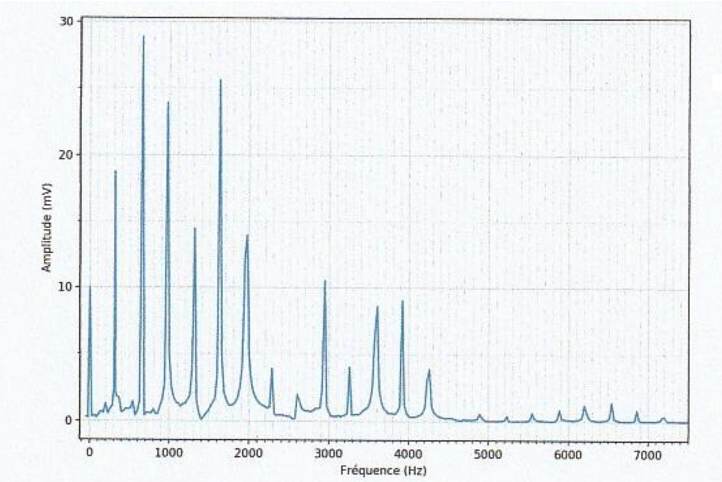
-b- Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).

-c- La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi, aigu. Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes (accordées), notées f_{ac} sont données dans le tableau ci-contre. De quelle corde de guitare s'agit-il ? Peut-on considérer que la corde de guitare est accordée ? Justifier.

Corde	Fréquence (f_{ac})
Mi grave	82,4 Hz
La	110,0 Hz
Ré	146,8 Hz
Sol	196 Hz
Si	246,9 Hz
Mi aigu	329,6 Hz

-d- L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaitre des harmoniques ? Justifier.

-e- La figure ci-dessous correspond au spectre en amplitude du signal électrique enregistré. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre en amplitude du signal.



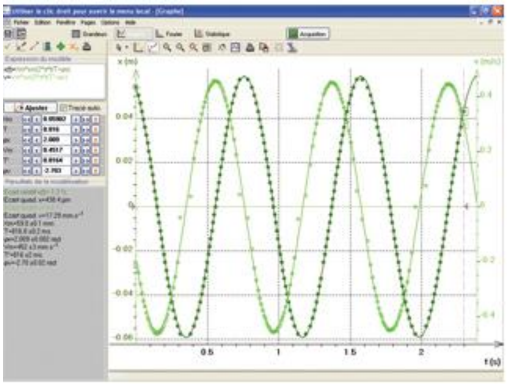
Nous constatons à travers cette étude sommaire d'une corde de guitare toute l'importance des fonctions harmoniques du temps… Si nous voulons décrire une fonction périodique quelconque, nous devons nous familiariser avec la notion de fonction harmonique du temps. C'est ce que nous allons aborder dans la suite de ce cours.

II : Fonction harmonique du temps

1) Expérience

Observons le signal enregistré par un capteur de force relié à un pendule élastique. Le signal mesuré par le capteur de force est visualisé grâce à une carte d'acquisition à l'aide du logiciel Latis-Pro :

Capteur force



La tension mesurée est proportionnelle à l'allongement du ressort. Si on note $x(t)$ l'allongement du ressort, $x(t)$ est une fonction harmonique (ou sinusoïdale) du temps.

2) Définitions

La fonction $x(t)$ une fonction harmonique du temps si elle peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{x(t) = A.\cos(\omega.t + \varphi)}$$

Avec :

- A : amplitude du signal $x(t)$. L'amplitude du signal correspond à la valeur maximale que peut prendre la fonction $x(t)$. Par définition, l'amplitude est positive : $A > 0$.
  Homogénéité : $[x(t)] = [A]$ donc A possède la même homogénéité (et donc unité) que $x(t)$.
  Mesure de crète à crète : pour déterminer l'amplitude du signal $x(t)$, on mesure l'intervalle entre la valeur maximale et la valeur minimale de $x(t)$ qui donne $2.A$.

- On note T la période de la fonction $x(t)$. La période correspond à la durée minimale nécessaire pour que la fonction $x(t)$ se reproduise identiquement à elle-même :

$$x(t + T) = x(t)$$

  En explicitant :

$$x(t + T) = A.\cos(\omega.(t + T) + \varphi) = A.\cos(\omega.t + \omega.T + \varphi) = A.\cos(\omega.t + \varphi)$$

  Ceci implique que :

$$\boxed{\omega.T = 2.\pi}$$

- ω : pulsation du phénomène périodique
  On note f la fréquence du phénomène périodique. Dans le système international, l'unité de fréquence est le Hertz (symbole Hz). La fréquence correspond au nombre de fois que le phénomène se reproduit en une seconde.
  Par définition :

$$\boxed{f = 1/T}$$

  On en déduit que :

$$\omega = \frac{2.\pi}{T} = 2.\pi.f$$

Dans les unités du système international, l'unité de pulsation est le $\mathrm{rad.s^{-1}}$.

- On note $\varphi(t)$ la phase de la fonction $x(t)$:

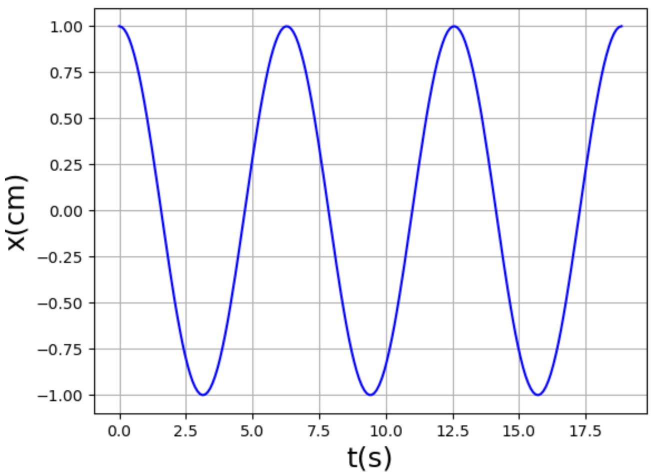
$$\varphi(t) = \omega.t + \varphi$$

A l'origine des temps : $\varphi(0) = \varphi$ appelé « phase à l'origine des temps ».

Rq. : Si la période, la fréquence et la pulsation dépendent à priori de l'oscillateur, l'amplitude et la phase à l'origine des temps dépendent des conditions initiales (c'est-à-dire des données à $t = 0$).

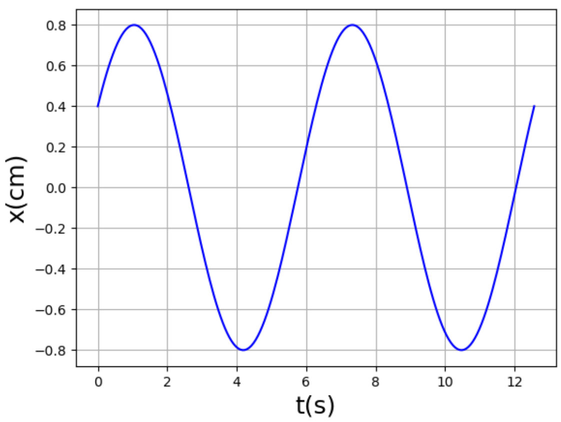
3) Illustration

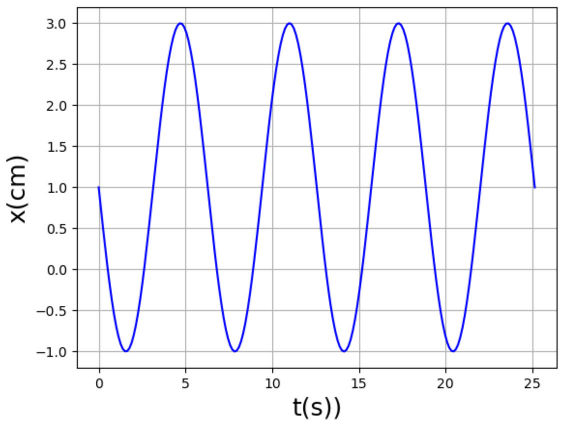
$x(t)$ est une fonction harmonique du temps. Déterminons l'amplitude (mesure de crête à crête), la période T, la fréquence, la pulsation ainsi que la phase à l'origine des temps.



4) Exercice

Déterminer l'amplitude, la période T, la fréquence, la pulsation ainsi que la phase à l'origine des temps sur les deux figures présentées ci-dessous :





5) Déphasage entre deux signaux

Considérons deux fonctions harmoniques de même période (donc même pulsation ω), notées $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1.\cos(\omega.t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_2.\cos(\omega.t + \varphi_2) \end{cases}$$

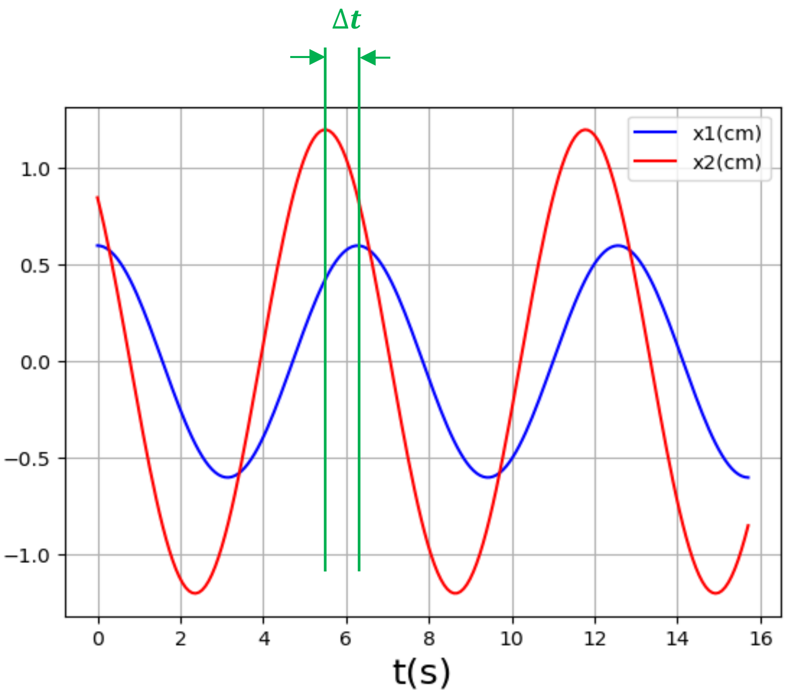
On note $\varphi_{1/2}$ le déphasage de $x_1(t)$ par rapport à $x_2(t)$ défini par :

$$\varphi_{1/2} = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) = (\omega.t + \varphi_1) - (\omega.t + \varphi_2)$$

$$\boxed{\varphi_{1/2} = \varphi_1 - \varphi_2}$$

Rq. : de la même manière, on peut définir le déphasage de $x_2(t)$ par rapport à $x_1(t)$: $\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1 = -\varphi_{1/2}$.

Comment déterminer le déphasage entre les deux signaux ?



On peut mesurer les phases à l'origine des temps de $x_1(t)$ et de $x_2(t)$ comme précédemment puis calculer $\varphi_{1/2} = \varphi_1 - \varphi_2$. En notant qu'en abscisse on mesure des temps, on peut également mesurer le décalage temporel Δt entre les deux signaux puis en déduire le déphasage en posant que :

$$\boxed{|\varphi_{1/2}| = \frac{2.\pi.\Delta t}{T} = \omega.\Delta t}$$

où Δt est l'intervalle de temps (défini positif) qui sépare les deux signaux.

Mesures : $\Delta t = 0{,}82\ s$ et $T = 6{,}2\ s$ donc $|\varphi_{1/2}| = 0{,}83$ rad (voisin de $\pi/4$).

Le premier signal qui passe par zéro est en avance (mod. $2.\pi$) sur l'autre. Si $x_1(t)$ est en avance sur $x_2(t)$ alors $\varphi_{1/2} = \varphi_1 - \varphi_2$ est positif, sinon $\varphi_{1/2}$ est négatif.

Sur la figure ci-dessus, $x_2(t)$ est en avance sur $x_1(t)$ donc $\varphi_{1/2} < 0$ soit :

$$\varphi_{1/2} = -0{,}83 \text{ rad}$$

III : Exemples de signaux physiques

1) Les ondes sonores

Une onde sonore est une vibration mécanique qui se propage de manière longitudinale dans un fluide (pour l'air) ou un solide (dans les métaux) grâce à la déformation élastique du milieu. Une onde sonore est une surpression acoustique. Considérons une onde sonore se propageant dans la direction de l'axe $X'X$ au cours du temps. Dans l'air, à un instant t donné, **la surpression acoustique** à l'abscisse x est définie par :

$$p(x,t) = P(x,t) - P_0$$

avec P_0 pression atmosphérique (sans onde) et $P(x,t)$ pression atmosphérique en présence de l'onde sonore.

Expérience : observons le son émis par un haut-parleur relié à un GBF en fonction de la fréquence. On constate que les fréquences audibles par l'homme sont comprises entre :

Fréquences audibles : … … … … $< f <$………..

On constate que la sensibilité auditive dépend de la fréquence. L'oreille humaine possède un maximum de sensibilité autour de 1 kHz.

Au voisinage de 1 kHz, la plus faible surpression acoustique audible par l'homme (notée $p_{réf}$) est : $p_{réf} = 2.10^{-5}$ Pa (avec $P_0 = 1{,}0.10^5\ Pa$). A cette même fréquence, le seuil de douleur pour l'homme est environ 10^6 fois plus intense…Ces données mettent en relief la très grande sensibilité de nos tympans.

Si on note P_{dB} la surpression acoustique en décibels (noté dB) définie par :

$$P_{dB} = 20.\log\left(\frac{p}{p_{réf}}\right)$$

ceci implique qu'un son est douloureux pour $P_{dB} > 120\ dB$. En fait, bien avant qu'un son n'atteigne les $120\ dB$ il y a risque de détérioration irréversible des tympans.

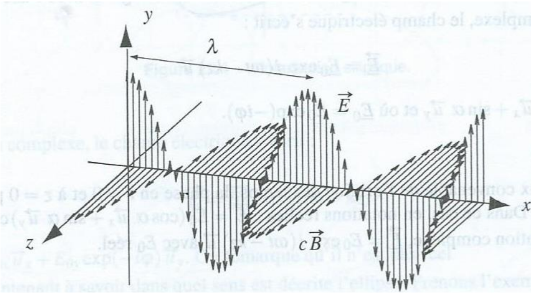
La perception auditive dépend de l'allure du signal électrique. A une même fréquence, la perception auditive (également appelée le « timbre ») dépend du type de signal électrique imposé par le GBF : le son émis par un signal sinusoïdal n'est pas le même que celui d'un signal triangulaire ou d'un signal carré (cf théorème de Fourier).

Quelques ordres de grandeur :

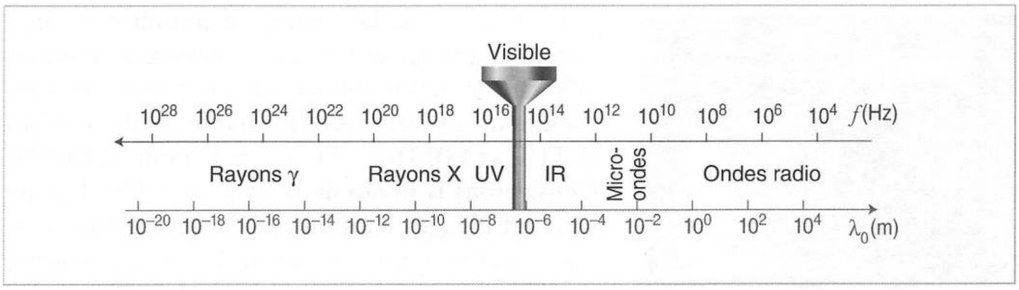
- En téléphonie : fréquences comprises entre 300 Hz et 3,4 kHz
- Norme HiFi (pour high fidelity) : entre 20 Hz et 20 kHz...

2) Ondes électromagnétiques

Nous avons vu dans le cours d'optique que la lumière est une onde électromagnétique. Le modèle le plus simple pour décrire la lumière est celui de l'onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement (modèle de l'OPPM). Dans ce modèle, la lumière est une onde transversale caractérisée par un couple $(\vec{E}, \vec{B})$:



La lumière correspond à un tout petit domaine des ondes électromagnétiques :



Fréquences et longueurs d'onde dans le vide des ondes électromagnétiques.

Quelques ordres de grandeur :

- domaine du visible dans le vide (au voisinage de 5.10^{14} Hz)
- wifi (fréquences comprises entre 2,4 GHz et 5 GHz)
- téléphones portables 4 G (autour de 3 GHz) et Bluetooth (2,4 GHz).
- Ondes FM (entre 87 et 106 MHz).
- signal électrique (réseau EDF : 50 Hz)