Chap 2 : Propagation d'un signal et ondes stationnaires

Introduction : Après avoir présenté l'intérêt du modèle de l'oscillateur harmonique pour décrire des signaux quelconques (via le théorème de Fourier), nous allons nous étudier les ondes progressives sinusoïdales puis les ondes stationnaires. Nous illustrerons ces notions en étudiant quelques instruments à cordes (guitare, piano, harpe) et à vent (flute traversière et flute à bec).

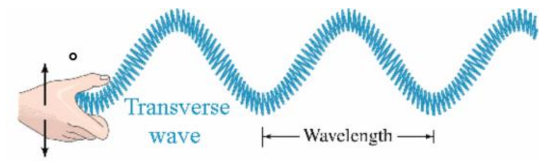
I : Onde progressive

1) Définition

Une onde est un phénomène physique dans lequel une perturbation locale se déplace de proche en proche dans l'espace, au cours du temps, sans qu'il y ait de déplacement de matière en moyenne. Toute grandeur physique, nulle dans l'état de repos et apparaissant avec la perturbation, est appelée signal physique transporté par l'onde.

2) Expériences

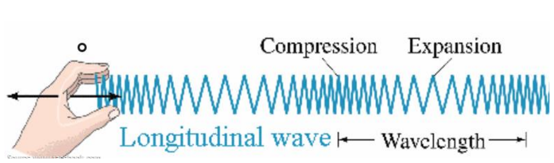
Propagation d'une onde transversale dans un ressort :



Le signal observé est **une onde transversale**, c'est-à-dire que la perturbation est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.

Exemples d'ondes transversales : la houle, vibration d'une corde, les ondes électromagnétiques…

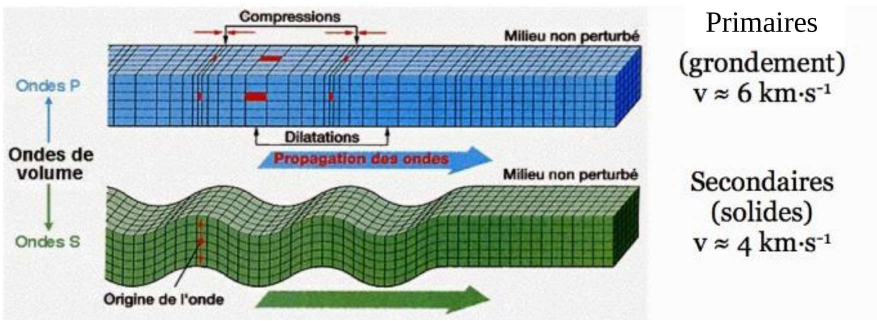
Propagation d'une onde longitudinale dans un ressort :



Le signal observé est **une onde longitudinale** : la perturbation est parallèle à la direction de propagation de l'onde.

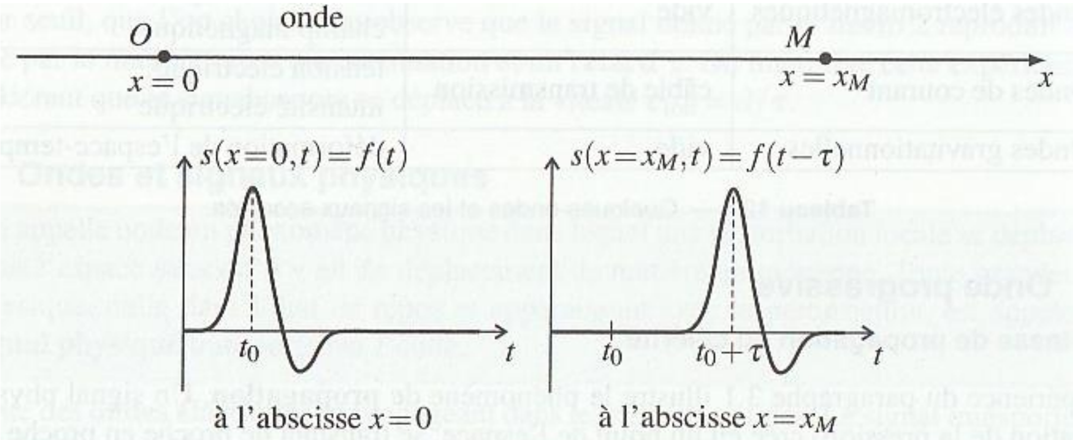
Exemples d'ondes longitudinales : les ondes sonores.

Les ondes sismiques peuvent être longitudinales (ondes de type P) ou transversales (ondes de type S). En général, quand il y a tremblement de terre, les ondes longitudinales (P) se propagent plus rapidement que les ondes transversales (S) : le sol commence donc par vibrer horizontalement avant de vibrer verticalement.



3) Onde progressive

Considérons une vibration se propageant sans atténuation et sans déformation le long d'une corde tendue, dans la direction d'un axe $X'X$. On note $s(x,t)$ le signal fonction de la variable x et du temps :



Soit $s(x = 0, t) = f(t)$ le signal observé à l'abscisse $x = 0$, au cours du temps. Un observateur placé à l'abscisse $x = x_M$ observera le même signal… mais avec un certain retard (noté τ) par rapport à l'observateur situé à l'abscisse $x = 0$. Soit $s(x = x_M, t)$ le signal visualisé à l'abscisse $x = x_M$ au cours du temps : $s(x = x_M, t) = f(t - \tau)$.

Supposons que le signal se propage à la célérité c supposée constante entre les abscisses $x = 0$ et $x = x_M$:

$$\tau = x_M/c$$

On peut noter que :

$$s(x = x_M, t) = f(t - \tau) = f(t - x_M/c)$$

En multipliant l'argument de cette fonction par la célérité c de l'onde (et en inversant les signes dans les parenthèses) on peut également définir une fonction F telle que :

$$s(x = x_M, t) = f(t - x_M/c) = F(x_M - c.t)$$

En généralisant à toute variable x, nous retiendrons que :

Toute onde progressive se propageant sans atténuation et sans déformation à la célérité c dans la direction des $\boldsymbol{x}$ **croissants** est du type :

$$s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = F(x - c.t)$$

De la même manière, on peut établir que toute onde progressive se propageant sans atténuation et sans déformation à la célérité c dans la direction des $\boldsymbol{x}$ **décroissants** est du type :

$$s(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right) = G(x + c.t)$$

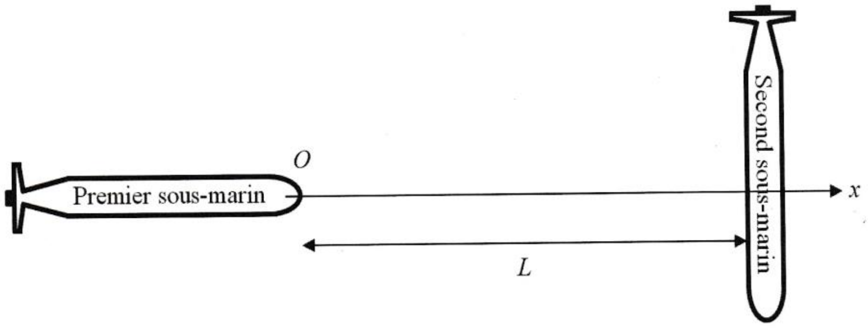
4) Exercice : Principe du sonar (extrait PB-CC)

I: La propagation du son

I.1) Définir une onde. Expliquer en quoi la propagation d'une onde est un phénomène à la fois spatial et temporel. Quelle(s) grandeur(s) physique(s) peut-on associer à une onde acoustique ?

I.2) Le son est une onde mécanique. Donner deux autres exemples d'ondes mécaniques (mais non acoustiques).
I.3) A quel intervalle de fréquences correspond le domaine des ondes sonores audibles par l'homme ? Qu'appelle-t-on "ultrasons" ? Expliquer un des usages autre que dans les sonars que l'homme peut faire des ultrasons ?
I.4) Pendant un orage, on peut grossièrement évaluer la distance à laquelle est tombée la foudre. Si on divise par trois la durée (en secondes) entre un éclair et le tonnerre, on obtient la distance cherchée (en kilomètres).
A partir de cette observation, estimer approximativement la valeur numérique de la vitesse C_{air} du son dans l'air par temps orageux. La réponse sera justifiée.

II: Principe du sonar



Les sous-marins, vus du dessus

Un sonar ("SOund Navigation and Ranging") est un dispositif de détection utilisant les ondes acoustiques comme signal détectant. Il permet aux sous-marins de naviguer correctement (mesure de la profondeur) ou aux sous-mariniers de repérer les obstacles et les autres navires. Certains animaux(chauve-souris, dauphins....) utilisent des systèmes similaires au sonar pour repérer leurs proies ou des obstacles. On suppose dans cette partie que la mer est un milieu homogène dans lequel le son se propage rectilignement. A $20°\ C$, la vitesse du son dans l'eau de mer est $C_{mer} = 1{,}50\ km.s^{-1}$. L'avant d'un sous-marin est équipé d'un sonar lui permettant d'éviter d'entrer en collision avec un autre sous-marin. Le sonar est constitué d'un émetteur d'ondes sonores et d'un récepteur capable d'identifier l'écho de l'onde précédemment émise. On note O l'avant du sous-marin équipé du sonar et (Ox)l'axe du sous-marin, correspondant à l'axe de propagation de l'onde sonore. Un second sous-marin est à la distance L du premier, dans la configuration représentée sur la figure 1.

II.1) Expliquer le principe de fonctionnement d'un sonar.
II.2) L'émetteur produit une très brève impulsion sonore. Le récepteur en reçoit l'écho au bout d'une durée $\Delta t_e = 38{,}8\,ms$. En déduire la distance L à laquelle se situe le second sous-marin, faire l'application numérique.
A partir de l'instant $t = 0$, le sonar émet l'impulsion sonore sinusoïdale de la figure 2, pendant une durée $\Delta t_i = 800\ \mu s$.

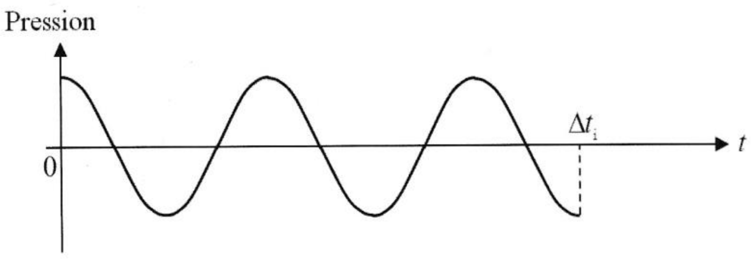


FIGURE 2 – Impulsion sinusoïdale correspondant au signal envoyé par le sonar

II.3) Déterminer, en justifiant, la valeur numérique de la fréquence f de l'onde émise par le sonar.
On s'intéresse à la propagation spatiale de l'impulsion sonore. On la représente alors dans le système d'axes de la figure 3.

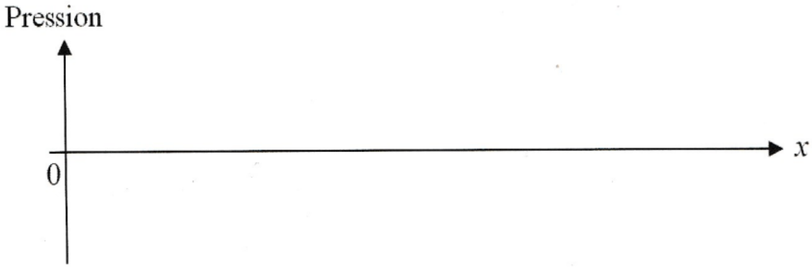


FIGURE 3 – Propagation spatiale

II.4) Exprimer et calculer numériquement la longueur spatiale Δx de l'impulsion.
II.5) Calculer numériquement, en justifiant précisément, les positions du début (ou front) de l'impulsion et de sa fin à l'instant $t = 12{,}0\ ms$. Reproduire sur la copie le système d'axes de la figure 3 et y représenter l'impulsion sonore à cet instant.
Un détecteur d'ondes sonores est placé sur le second sous-marin, sur l'axe (Ox).
II.6) Calculer numériquement, en justifiant précisément, les instants auxquels le détecteur reçoit le début et la fin de l'impulsion.
II.7) Représenter l'axe horizontal de la figure 2 sur la copie. Graduer cet axe. Repérer sur cet axe les instants auxquels le détecteur reçoit le début et la fin de l'impulsion et représenter l'évolution de l'amplitude enregistrée par ce détecteur au cours du temps.

5) Ondes progressives sinusoïdales
Soit $y(t)$ une fonction sinusoïdale du temps. Nous avons vu dans le chapitre précédent que cette fonction est du type :

$$y(t) = A.\cos(\omega.t + \varphi)$$

avec A amplitude du phénomène, $\omega = 2.\pi/T$ pulsation et φ phase à l'origine des temps (cf Chap. 1).

Considérons une onde progressive sinusoïdale se propageant sans atténuation et sans déformation dans le sens des x croissants. Cette fonction $y(x,t)$ est du type :

$$y(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = A.\cos\left(\omega.\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right)$$

On note k la norme du vecteur d'onde défini par : $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}_x$

avec $\vec{u}_x$ vecteur unitaire orienté dans le sens des x croissants. Le vecteur d'onde est orienté dans le sens de propagation de l'onde.

Nous retiendrons la forme générale d'une **onde progressive sinusoïdale** se propageant dans le sens des x croissants, en fonction de la norme du vecteur d'onde :

$$y(x,t) = A.\cos(\omega.t - k.x + \varphi)$$

Cette fonction possède une double périodicité :

- Une périodicité temporelle (cf chap.1) : $T = 2.\pi/\omega$
- Par analogie, la fonction $y(x,t)$ possède également une périodicité spatiale : $\lambda = 2.\pi/k$

Quelle relation existe-t-il entre la période spatiale et la période temporelle ?

Sachant que $\omega = k.c$ on établit que :

$$\boxed{\lambda = c.T}$$

Définition de la vitesse de phase :
On appelle vitesse de phase, notée v_φ la vitesse de propagation d'une onde progressive sinusoïdale définie par :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

On constate que la vitesse de phase s'identifie à ce que nous avons appelé « la célérité c » de l'onde :

$$\boxed{v_\varphi = c}$$

Définition d'un milieu dispersif :
Considérons une onde progressive sinusoïdale se propageant dans un milieu donné. On dit que ce milieu est dispersif pour cette onde si la vitesse de phase dépend de la pulsation ω (respectivement la longueur d'onde λ).

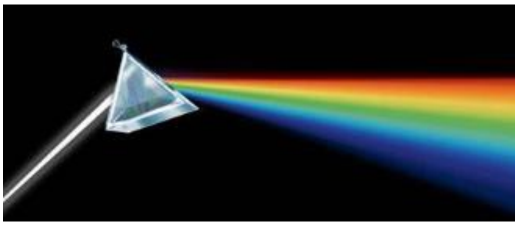
$$\boxed{\text{Milieu dispersif : } v_\varphi(\omega)}$$

Si la vitesse de phase ne dépend pas de la pulsation ($v_\varphi = c =$ cte), le milieu est non dispersif.

Exemples :

- Dans le vide, la célérité de la lumière est constante : $v_\varphi = c = 3{,}00.10^8\ m.s^{-1}$. Le vide est non dispersif.

- Dans l'expérience du prisme de Newton, l'indice $n(\lambda)$ du prisme dépend de la longueur d'onde (cf formule semi-empirique de Cauchy : $n(\lambda) = A + B/\lambda^2 + \cdots$) donc la vitesse de phase dépend de λ (et donc de ω) : $v_\varphi(\lambda) = c/n(\lambda)$. Le prisme est dispersif pour la lumière.



- En eau peu profonde ($\lambda \gg H$), la vitesse de la houle est donnée par la formule de Lagrange :

$$v_\varphi = \sqrt{g.H} \text{ : milieu non dispersif}$$

- En eau profonde, la vitesse de la houle est donnée par la formule de Newton :

$$v_\varphi = \sqrt{g/k} = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}\sqrt{g.\lambda}$$

On constate que $v_\varphi(\lambda)$: le milieu dispersif.

Rq. : Ces deux expressions sont des formes asymptotiques d'une expression plus complexes $v_\varphi(\omega)$.

6) Ordres de grandeur

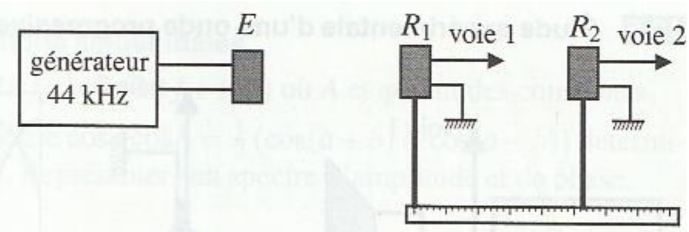
-a- Célérité de la lumière

La célérité de la lumière dans le vide est $c = 3{,}00.10^8\ m.s^{-1}$. Dans un milieu transparent d'indice n, la vitesse de la lumière est $v = c/n$. Par exemple, dans un milieu d'indice $n = 1{,}50$ la vitesse de la lumière est $v = 2{,}00.10^8\ m.s^{-1}$: la lumière se propage moins vite dans les milieux transparents que dans le vide.

-b-Célérité du son

1) Dans l'air

Un émetteur d'ultrasons E produit une onde sinusoïdale de fréquence $f = \ldots\ldots\ldots\ldots\ kHz$ mesurée à l'aide de deux récepteurs R_1 et R_2 reliés à un oscilloscope. L'oscilloscope à l'écran affiche deux sinusoïdes d'amplitudes à peu près égales si les récepteurs sont à peu près à la même distance de l'émetteur. Les deux récepteurs fournissent des tensions électriques proportionnelles au signal de l'onde.



Le récepteur R_1 est fixe. Le récepteur R_2 peut-être translaté le long d'une règle graduée, parallèle à la direction entre l'émetteur et ce récepteur. On commence par ajuster sa position pour voir deux signaux en phase.

On note la position initiale de R_2 : $x_{2i} =$……………… On recule progressivement R_2 en observant l'écran de l'oscilloscope : les signaux sont alternativement en opposition de phase et en phase. Quand les signaux sont pour la $20^{ème}$ fois de suite en phase, on note la position finale du récepteur R_2 : $x_{2f} =$……………… La règle étant graduée en millimètre, les mesures sont effectuées avec une précision $\Delta = 0{,}50\ mm$. Déterminons la célérité du son dans l'air, à température ambiante c_{son} :

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

On établit ainsi qu'à température ambiante, la célérité du son dans l'air est :

$c_{son}(air) =$

La célérité des ondes sonores dans les fluides (liquide et gaz) est non-dispersive. On montre que dans un fluide la célérité du son est donnée par :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \cdot \chi_0}}$$

avec : ρ_0 masse volumique du fluide et χ_0 coefficient de compressibilité (isentropique) du fluide.

Dans l'air assimilé à un gaz parfait ($\chi_0 = 1/\gamma. P_0$) la célérité du son dans l'air peut s'exprimer sous la forme :

$$c_{son}(air) = \sqrt{\frac{\gamma. R. T}{M}}$$

avec : $\gamma = 1{,}41$ (cf cours de thermodynamique) ; $R = 8{,}31\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$ constante des gaz parfaits ; $T(K)$ température exprimée en Kelvin et $M = 28{,}8\ \mathrm{g.mol^{-1}}$ masse molaire de l'air.

A.N. : A la température ambiante $T(K) = 293\ K$, $c_{son}(air) = 345\ m.s^{-1}$.

2) Dans l'eau

Avec $\rho_0 = 1{,}0.10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$ et $\chi_0 = 5{,}0.10^{-10}\ \mathrm{Pa^{-1}}$ on calcule la célérité du son dans l'eau : $c_{son}(eau) = 1{,}4.10^3\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

3) Dans les solides

La propagation des ondes élastiques longitudinales dans un solide est non-dispersive. On montre que la célérité des ondes sonores dans les solides est donnée par :

$$c_{son}(sol) = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$$

avec ρ_0 masse volumique du solide et E le module de Young. Plus le solide est rigide, plus E est grand.

A.N. : Dans l'acier $\rho_0 = 8{,}0.10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$ et $E = 2{,}1.10^{11}\ \mathrm{Pa}$; $c_{son}(sol) = 5{,}1.10^3\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

4) Anecdote : le problème du « fluide éthéré »…

Dans la première moitié du XVIII^{ème} s, Augustin Fresnel étudia la propagation de la lumière dans « le fluide éthéré » par analogie avec la propagation du son dans les solides, dans l'hypothèse d'une onde longitudinale. La vitesse de la lumière étant très élevée, ceci impliquait que « le fluide éthéré » soit à la fois extrêmement léger et rigide à la fois… ce qui posait un problème conceptuel !
Finalement, Fresnel abandonna l'hypothèse de l'onde longitudinale pour celui d'une onde transversale ce qui était très audacieux à l'époque !
Fresnel fut donc le premier à faire l'hypothèse que la lumière est une onde transversale, ce qui sera confirmé quelques années plus tard par les travaux de J.C. Maxwell.


Augustin Fresnel

-c- Célérité de la houle

- En eau peu profonde ($\lambda \gg H$) : $v_\varphi = \sqrt{g.H}$
  Exemple : les tsunamis vérifient la formule de Lagrange. Pour $H = 4000\ m$, la vitesse d'un tsunami est de l'ordre de $700\ km/h$.
  Dans la limite de validité du modèle, dans la Manche (dont la profondeur moyenne est de l'ordre de $50\ m$), la vitesse de la houle est de $80\ km/h$.

- En eau profonde : $v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}\sqrt{g.\lambda}$
  Exemple : en eau profonde, la vitesse de la houle de longueur d'onde $\lambda = 50\ m$ est l'ordre de $30\ km/h$.

II : Ondes stationnaires

1) Présentation

Dans les expériences réalisées en début de cours, nous avons constaté que l'onde incidente subit une réflexion quand elle rencontre un obstacle. Dans cette partie, nous étudierons la superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie. Nous supposerons que les ondes étudiées se propagent sans déformation et sans atténuations dans la direction d'un axe $X'X$ au cours du temps.

Considérons une onde incidente progressive sinusoïdale se propageant dans le sens des x croissants notée $y_+(x,t)$. Cette onde rencontre un obstacle à l'abscisse $x = L$, ce qui produit une onde réfléchie assimilée à une onde progressive sinusoïdale se propageant dans le sens des x décroissants, notée $y_-(x,t)$.

En choisissant l'origine des temps de telle manière que la phase à l'origine des temps soit nulle, la fonctions $y_+(x,t)$ est du type : $y_+(x,t) = A.\cos(\omega.t - k.x)$. Si on note φ le déphasage induit à la réflexion, l'onde réfléchie est du type : $y_-(x,t) = A.\cos(\omega.t + k.x + \varphi)$. Déterminons l'onde résultante définie par :

$$y(x,t) = y_+(x,t) + y_-(x,t)$$

en faisant l'hypothèse que les conditions aux limites sont les suivantes : $y(x=0,t) = 0$ et $y(x=L,t) = 0$, c'est-à-dire « corde pincée » à ses extrémités (comme une corde de guitare ou de piano…).

2) Vibrations résultantes

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

3) Modes propres

……

……

……

……

……

……

……

……

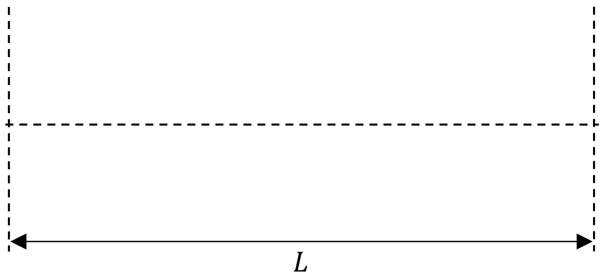
4) Illustration

Avec $n \in \mathbb{N}^*$ et :

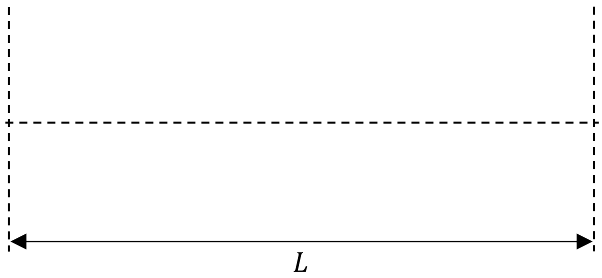
$$\begin{cases} \lambda_n = \dfrac{2.L}{n} \\ f_n = n.f_1 \end{cases}$$

Représentons les tois premier mode de vibration d'une corde tendue à ses extrémités :

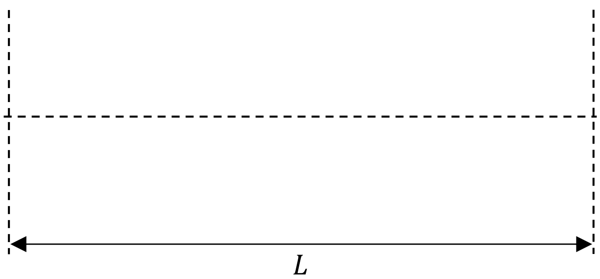
Pour $n = 1$:



Pour $n = 2$:



Pour $n = 3$:



5) Observation : corde de Melde

On fixe une masse à l'extrémité d'une corde et un vibreur (de fréquence variable) à l'autre extrémité.
On constate qu'en fonction de la fréquence, on observe un, ou plusieurs fuseaux en accord avec ce qui a été établi précédemment. Pour n fuseaux, on vérifie que la fréquence $f_n = n.f_1$.

6) Généralisation

La solution $y(x,t)$ dépend des conditions aux limites… En généralisant, on peut dire que la solution générale d'une onde stationnaire est du type :

$$y(x,t) = A.\cos(\omega.t+\varphi).\cos(k.x+\psi)$$

où φ et ψ sont des constantes définies par les conditions aux limites.

Quand on gratte un corde de guitare, celle-ci émet un son de fréquence f (égale à la fréquence fondamentale $f_1 = c/2.L$ de la corde). L'analyse spectrale du son émis par la corde vibrante permet d'identifier la fréquence fondamentale f_1 du signal ainsi que les différents harmoniques de fréquences $f_n = n.f_1$ qui composent le signal.

Par application du théorème de Fourier, la vibration résultante est :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.\cos(\omega_n.t+\varphi_n).\cos(k_n.x+\psi_n)$$
$$\text{avec } n \in \mathbb{N}^* : \omega_n = n.\pi.c/L \text{ et } k_n = \omega_n/c$$

7) Exercice : Etude du son émis par une corde de guitare

A) Première partie : étude théorique

Nous étudions la propagation d'une déformation le long d'une corde d'axe OX et de longueur L. Nous supposerons dans cette étude que l'onde se propage sans amortissement à la célérité c le long de la corde. La déformation qui s'effectue dans la direction de OY sera notée $y(x,t)$.
On suppose que l'action du guitariste sur la corde se traduit par l'apparition d'une onde incidente du type $y_+(x,t) = a.\cos(\omega.t - k.x)$. La fonction $y_+(x,t)$ modélise une onde progressive sinusoïdale.
1) Rappeler la signification et les unités des grandeurs a, ω et k.
2) A l'extrémité de la corde, la vibration subit une réflexion. On note $y_-(x,t) = a.\cos(\omega.t + k.x + \varphi)$ l'onde réfléchie. Commenter le signe positif devant le second terme dans la parenthèse ainsi que la présence du déphasage φ.
3) On note $y(x,t) = y_+(x,t) + y_-(x,t)$ la vibration résultante. La corde est fixée en $x = 0$, ceci implique que $y(0,t) = 0$. Déterminer le déphasage φ.
4) Montrer que la vibration résultante peut s'exprimer sous la forme : $y(x,t) = 2.a.f(x).g(t)$ où $f(x)$ et $g(t)$ sont respectivement une fonction de la variable x et une fonction du temps que l'on explicitera.
5) La corde est fixe en $x = L$. Il apparait des modes propres de vibration que l'on peut caractériser par un entier naturel $n \in N^*$. Déterminer les longueurs d'ondes λ_n en fonction de n et de L ainsi que les pulsations propres ω_n en fonction de n, L et de c.
6) Montrer que la fonction $y(x,t)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$y(x,t) = 2.a.\sin\left(\frac{n.\pi.x}{L}\right).\sin\left(\frac{n.\pi.c.t}{L}\right)$$

7) On appelle mode fondamental le signal de plus basse fréquence et les harmoniques les fréquences d'ordre supérieur. Exprimer la longueur d'onde λ_1 du mode fondamental. Exprimer également les longueurs d'ondes λ_2 et λ_3 des deux premiers harmoniques en fonction de λ_1. Représenter ces trois modes de vibrations sur la corde de longueur L.

8) On note f_1 la fréquence du mode fondamental. Exprimer les fréquences f_2, f_3, f_4 et f_5 des 4 premiers harmoniques en fonction de f_1.

9) La célérité des ondes le long d'une corde de guitare est déterminée par les paramètres physiques suivants : la masse volumique du matériau de la corde μ, le diamètre d de la corde et la tension T à laquelle elle est soumise. On fait l'hypothèse que la célérité c est liée à ces grandeurs par une relation du type : $c = K.\mu^{\alpha}.d^{\beta}.T^{\gamma}$ où K est un facteur de proportionnalité (constante sans dimension) et α, β et γ des constantes. Par analyse dimensionnelle, déterminer α, β et γ. Par la suite, on prendra $K = 1{,}13$.

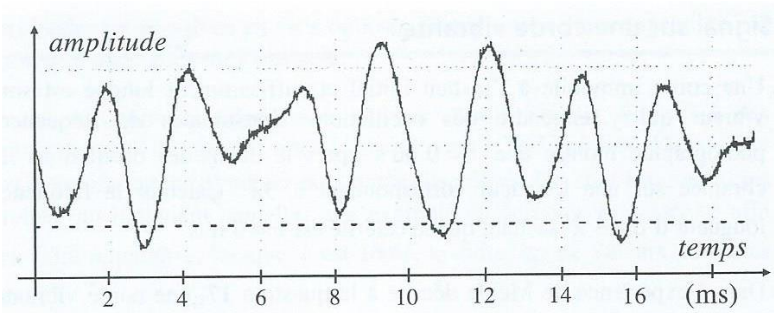
10) Une corde de guitare de longueur $L = 64{,}3\ cm$ est soumise à une tension $T = 86{,}9\ N$. Sachant que sa masse volumique est $\mu = 7{,}87.10^3\ kg.m^{-3}$ et que son diamètre est $d = 1{,}12\ mm$. Déterminer la célérité c de l'onde émise par la corde ainsi que la fréquence f_1 du mode fondamental.

B) Deuxième partie : étude expérimentale

On enregistre le son produit par la corde de guitare au moyen d'une carte d'acquisition. Grace à l'utilisation d'un logiciel adapté on visualise l'amplitude du signal enregistré au cours du temps ainsi que son spectre en amplitude. Ces enregistrements sont représentés ci-dessous en documents (1) et (2).

11) Exploitation du document 1 :

Amplitude du signal enregistré au cours du temps (document 1)



-a) Peut-on dire que le signal est harmonique ? Si non, proposer une explication (en 5 lignes maxi).

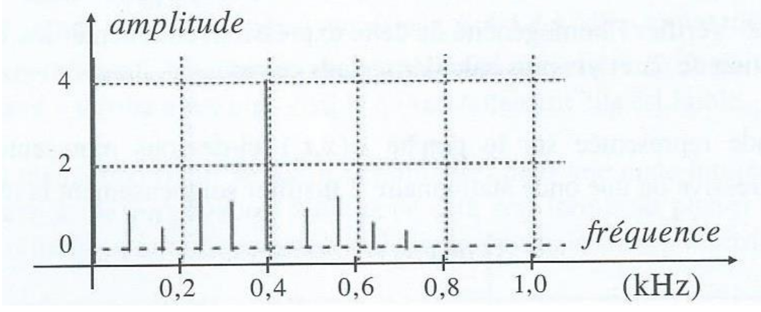
-b) Le signal est périodique (nous visualisons ici environ une période et demi). Déterminer la fréquence du signal et comparer cette fréquence à f_1.

-c) Déterminer une valeur approchée de la fréquence de l'harmonique de plus grande amplitude.

12) Exploitation du document 2 :

Spectre en amplitude du signal (document 2)

La figure ci-dessous présente le spectre du signal enregistré à l'aide du module FFT d'un logiciel d'acquisition. Dans cette étude, on ne tiendra pas compte du trait d'amplitude qui apparait sur l'axe d'amplitude (à fréquence nulle) qui est liée au protocole expérimental.



-a) Commenter ce document (5 lignes maxi).
-b) Déterminer la fréquence du mode fondamental. Cette valeur est-elle conforme à la valeur attendue ?
-c) Quelle relation existe-t-il entre la fréquence du mode fondamental et la fréquence des différents harmoniques ? Ceci est-il en accord avec ce qui a été établi à a question 8) ?
-d) Comparer la fréquence de l'harmonique de plus grande amplitude au résultat de la question 11-c) et commenter.

III : Instruments de musique et gammes musicales

1) Présentation
Nous allons appliquer les notions abordées dans ce chapitre dans l'étude d'instruments de musique. Si les analogies sont formelles pour les instruments à cordes (guitare, piano, harpe…), elles le sont moins pour les instruments à vent.

2) Instruments à vent
On modélise un instrument à vent par un tube creux dont les extrémités sont ouvertes ou fermées. Si l'extrémité de l'instrument est ouverte, nous ferons l'hypothèse que la pression à l'extrémité est égale à la pression atmosphérique. Dans ce cas, la surpression acoustique est nulle. Ceci induit la présence d'un nœud de vibration à l'extrémité du tube.
Si l'extrémité du tube est fermée nous ferons l'hypothèse que la surpression acoustique est maximale ce qui implique la présence d'un ventre de vibration à l'extrémité du tube. Nous allons illustrer ces propriétés dans l'exercice ci-dessous.

3) Exercice : Etude d'instruments à vent
Un tuyau sonore peut-être le siège d'ondes acoustiques stationnaires qui vont dépendre des conditions aux limites imposées à ses deux extrémités.

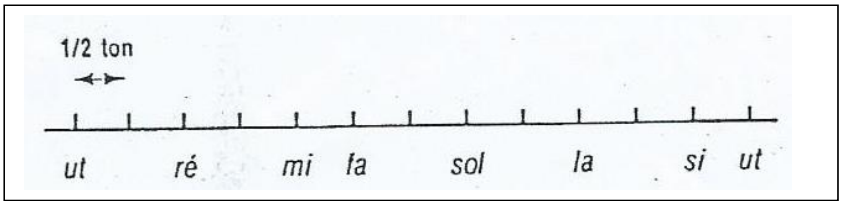
1) Justifier qualitativement que la surpression acoustique présente un ventre de vibration du côté fermé et un nœud de vibration du côté ouvert.
Un instrument à vent peut-être considéré comme un tuyau sonore de longueur L. Il se comporte donc pour certaines fréquences comme un résonateur siège d'un système d'ondes stationnaires de longueur d'onde λ. Ces fréquences sont les modes propres de l'instrument et correspondent aux notes qu'il est capable de générer.
2) La flûte traversière est un instrument considéré comme ouvert à ses deux extrémités. Faire un dessin de l'onde stationnaire dans le tuyau sonore correspondant à la note fondamentale, la note la plus basse générée par l'instrument. Déterminer la longueur de l'instrument pour que son fondamental soit la note Mi de fréquence ${f_1}^{fl} = 330$ Hz ; prendre pour la vitesse du son dans l'air $c = 340\ m.s^{-1}$. Exprimer ${f_1}^{fl}$ en fonction de c et L.
3) L'anche d'une clarinette est assimilée à une extrémité fermée. Refaire un dessin de l'onde stationnaire dans le tuyau sonore correspondant à la note fondamentale, c'est-à-dire de plus grande longueur d'onde. La clarinette a une longueur L sensiblement identique à celle de la flûte traversière. En déduire la fréquence ${f_1}^{cl}$ du fondamental de la clarinette ; quel est le plus grave des deux instruments ?
4) Montrer que les notes harmoniques sont régulièrement espacées en fréquence et que l'écart Δf entre deux harmoniques successifs est le même pour la flûte traversière et la clarinette. Quel est cet écart ?

4) Gammes musicales

Il existe différentes gammes musicales.... l'une des premières fut la gamme pythagoricienne utilisée en Europe jusqu'au XVI ème siècle. Aujourd'hui, beaucoup de musiciens utilisent la gamme tempérée.

La gamme tempérée est découpée en octaves. Une octave correspond au domaine de fréquences comprises entre f_0 et $f_1 = 2.f_0$. Chaque octave est découpée en 12 demi-tons équidistants. On passe d'un demi-ton au suivant en multipliant sa fréquence par $(2)^{\frac{1}{12}} = 1{,}06$. On vérifie que $\left[(2)^{\frac{1}{12}}\right]^{12}.f_0 = 2.f_0 = f_1$

Structure de la gamme tempérée :



Exemple : la fréquence du La est 440 Hz. Donner les fréquences de sol, si, do dans la gamme tempérée. Vérifier la concordance dans le tableau ci-dessous.

Fréquences des notes dans 3 systèmes, la = 440 Hz

Note	Intonation juste	Gamme de Pythagore	Gamme tempérée
do	264,00	260,74	**261,63**
do♯	275,00	278,44	**277,18**
ré	297,00	293,33	**293,66**
mi♭	316,80	309,03	**311,13**
mi	330,00	330,00	**329,63**
fa	352,00	347,65	**349,23**
fa♯	371,25	371,25	**369,99**
sol	396,00	391,11	**392,00**
sol♯	412,50	417,66	**415,30**
la	**440,00**	**440,00**	**440,00**
si♭	475,20	463,54	**466,16**
si	495,00	495,00	**493,88**
do	528,00	521,48	**523,25**