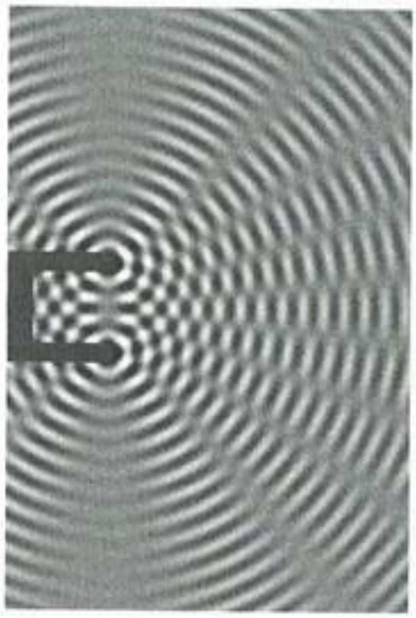
Chap 3 : Interférences et battements

Introduction : Nous commencerons ce chapitre par une étude des phénomènes d'interférences d'ondes mécaniques (cuve à onde puis ondes sonores) et lumineuses (dispositif des trous d'Young). Pour cela, nous établirons la formule de Fresnel qui nous permettra d'interpréter les phénomènes d'interférences constructives et destructives. Nous poursuivrons ce chapitre avec l'étude de la superposition d'ondes de fréquences voisines, ce qui nous conduira aux phénomènes de battements.

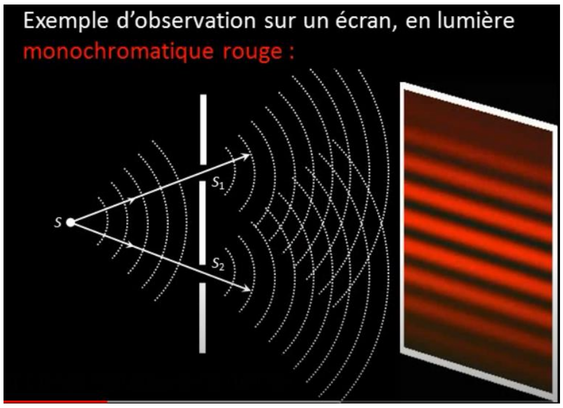
I : Phénomène d'interférences

1) Expériences

Dans une cuve à ondes, deux pointes frappent périodiquement la surface libre de l'eau. On observe des zones où l'amplitude des vibrations est maximale et d'autres où l'amplitude est minimale (voir nulle). Ceci est un phénomène d'interférences d'ondes mécaniques.



Dispositif des trous d'Young : la lumière émise par une source cohérente (Laser He-Ne) éclaire une plaque opaque dans laquelle deux fentes laissent passer la lumière. On observe des zones où la lumière est maximale et des zones où la lumière est nulle : on observe des interférences lumineuses. Ceci constitue ce que l'on appelait autrefois le « Paradoxe de la lumière : lumière plus lumière donne de l'obscurité… ».



2) Modélisation

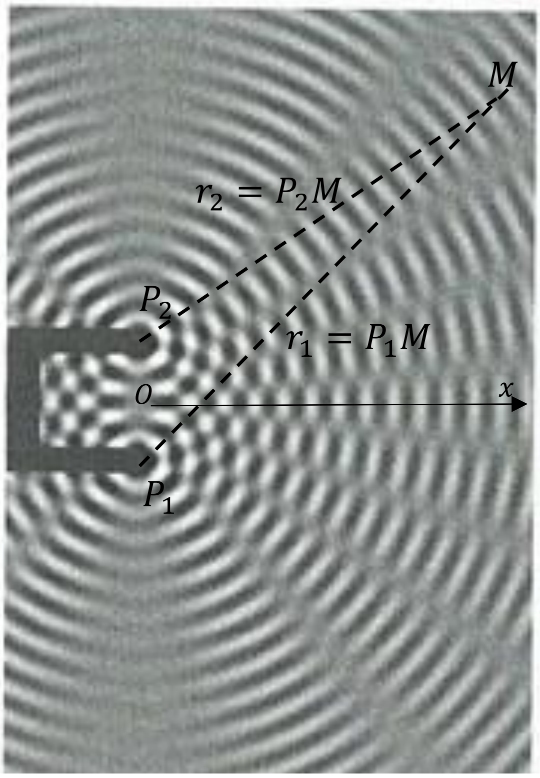
Les deux points (nommées P_1 et P_2) qui frappent la surface libre de la cuve à onde émettent des ondes progressives. Si on note r le rayon du cercle centré sur une pointe P, en faisant l'hypothèse que l'onde émise soit sinusoïdale (on néglige l'amortissement de l'onde ainsi que la variation d'amplitude pour une onde circulaire) la vibration émise par une pointe est du type :

$$s(r,t) = A.\cos(\omega.t - k.r + \varphi)$$

En définissant l'origine des temps de telle manière que la phase à l'origine des temps soit nulle, en notant que les vibrations émises par P_1 et P_2 sont en phase à l'émission, en un point M quelconque situé à la surface libre de la cuve à onde les vibrations émises par P_1 et P_2 sont :

$$\begin{cases} s_1(r_1,t) = A_1.\cos(\omega.t - k.r_1) \\ s_2(r_2,t) = A_2.\cos(\omega.t - k.r_2) \end{cases}$$

avec $r_1 = P_1M$, $r_2 = P_2M$, A_1 amplitude de $s_1(r_1,t)$ et A_2 amplitude de $s_2(r_2,t)$. La pulsation $\omega = 2.\pi.f$ où f est la fréquence de vibration des pointes P_1 et P_2 :



Posons :

$$\begin{cases} s_1(M,t) = s_1(r_1,t) = A_1.\cos(\omega.t + \varphi_1) \\ s_2(M,t) = s_2(r_2,t) = A_2.\cos(\omega.t + \varphi_2) \end{cases}$$

avec $\varphi_1 = -k.r_1$ et $\varphi_2 = -k.r_2$ déphasage de propagation.

La vibration résultante en M est :

$$s_{rés}(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t)$$

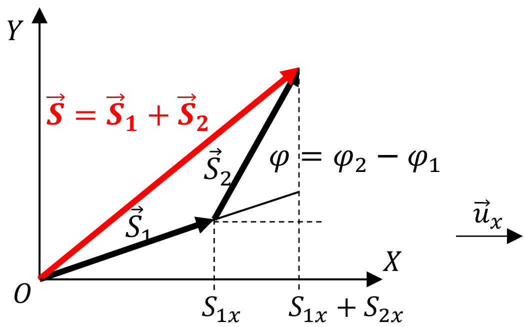
Posons :

$$s_{rés}(M,t) = A_{rés}.\cos(\omega.t + \alpha)$$

Que peut-on dire de l'amplitude de la vibration résultante en M, notée $A_{rés}$?

3) Formule des interférences

Soit $\vec{S_1}$ et $\vec{S_2}$ deux vecteurs de Fresnel définis tels que $\|\vec{S_1}\| = A_1$; $\|\vec{S_2}\| = A_2$ et dont la projection sur un axe OX (défini arbitrairement) s'identifient respectivement à $s_1(M,t)$ et $s_2(M,t)$:



$$S_{1x} = \vec{S_1}.\vec{u}_x = s_1(M,t) = A_1.\cos(\omega.t + \varphi_1)$$
$$S_{2x} = \vec{S_2}.\vec{u}_x = s_2(M,t) = A_2.\cos(\omega.t + \varphi_2)$$

Soit $\vec{S} = \vec{S_1} + \vec{S_2}$. Par projection on établit que :

$$S_x = S_{1x} + S_{2x} = s_1(M,t) + s_2(M,t)$$

$$S_x = s_{rés}(M,t) = A_{rés}.\cos(\omega.t + \alpha)$$

On constate que l'amplitude de S_x est égale à amplitude de la vibration résultante en M, c'est-à-dire $A_{rés}$. Pour déterminer $A_{rés}$, explicitons $\vec{S}^2$:

$$\vec{S}^2 = \left(\vec{S_1} + \vec{S_2}\right)^2 = \vec{S_1}^2 + \vec{S_2}^2 + 2.\vec{S_1}.\vec{S_2}$$

En notant que $\vec{S}^2 = A_{rés}^2$; $\vec{S_1}^2 = A_1^2$; $\vec{S_2}^2 = A_2^2$ et que $\vec{S_1}.\vec{S_2} = A_1.A_2.\cos\varphi(M)$ nous établissons que :

$$A_{rés}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2.A_1.A_2.\cos\varphi\,(M)$$

avec $\varphi(M) = \varphi_2 - \varphi_1$

Nous établissons l'expression de l'amplitude de la vibration résultante en M, donnée par projection des vecteurs de Fresnel. Cette relation est appelée formule des interférences :

$$A_{rés} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2.A_1.A_2.\cos\varphi(M)}$$

avec $\varphi(M) = \varphi_2 - \varphi_1$ déphasage entre $s_1(M,t)$ et $s_2(M,t)$ au point M

4) Différence de marche en M

Nous avons défini φ_1 et φ_2 comme étant des déphasages de propagation en M : $\varphi_1 = -k.r_1$ et $\varphi_2 = -k.r_2$. Avec $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, sachant que $k = 2.\pi/\lambda$ on peut exprimer φ sous la forme :

$$\varphi(M) = -k.r_2 + k.r_1 = \frac{2.\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)$$

On note $\delta(M)$ la différence de marche entre les deux vibrations au point M définie par :

$$\delta(M) = P_1M - P_2M$$

On établit l'expression du déphasage en fonction de la différence de marche au point M :

$$\varphi(M) = \frac{2.\pi.\delta(M)}{\lambda}$$

Nous retiendrons **la formule des interférences** en fonction de la différence de marche $\delta(M)$:

$$A_{rés} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2.A_1.A_2.\cos\left(\frac{2.\pi.\delta(M)}{\lambda}\right)}$$

5) Interférences constructives et destructives

-a- Interférences constructives

Les interférences sont **constructives** en M quand l'amplitude de la vibration résultante en M est **maximale**. L'amplitude est maximale pour :

$$\cos\left(\frac{2.\pi.\delta(M)}{\lambda}\right) = 1$$

L'amplitude de la vibration résultante est alors :

$$A_{rés} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2.A_1.A_2} = A_1 + A_2$$

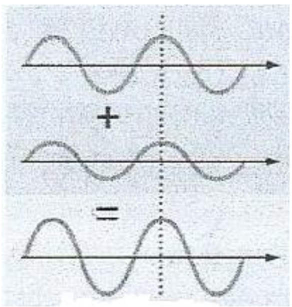
Dans le cas particulier où $A_1 = A_2 = A_0$: vibrations de même amplitude en M, alors $A_{rés} = 2.A_0$.
Pour que les interférences soient constructives en M, il faut que :

$$\frac{2.\pi.\delta(M)}{\lambda} = 2.n.\pi$$

avec $n \in \mathbb{Z}$, ce qui implique que :

$$\delta(M) = n.\lambda \text{ avec } n \in \mathbb{Z}$$

Les interférences sont constructives en M quand **les vibrations sont en phases.**



Rq. : On vérifie que sur l'axe Ox, $\delta(M) = 0$ pour tout point M. Les interférences sont constructives, l'amplitude des vibrations est maximale.

-b- Interférences destructives

Les interférences sont **destructives** en M quand l'amplitude de la vibration résultante en M est **minimale**, c'est-à-dire pour :

$$\cos\left(\frac{2.\pi.\delta(M)}{\lambda}\right) = -1$$

L'amplitude de la vibration résultante est alors :

$$A_{rés} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2.A_1.A_2} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2} = |A_1 - A_2|$$

en étant attentif au fait que $A_{rés} \geq 0$.
Dans le cas particulier où $A_1 = A_2 = A_0$: vibrations de même amplitude en M, alors $A_{rés} = 0$.

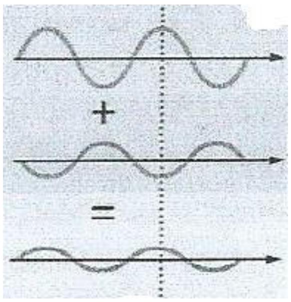
Pour que les interférences soient destructives en M, il faut que :

$$\frac{2.\pi.\delta(M)}{\lambda} = (2.n + 1).\pi$$

avec $n \in \mathbb{Z}$, ce qui implique que :

$$\delta(M) = \left(n + \frac{1}{2}\right).\lambda$$

Les interférences sont destructives en M quand **les vibrations sont en opposition de phases.**



6) Interférences lumineuses

Ce que nous venons d'établir pour les ondes mécaniques est généralisable aux ondes lumineuses. On montre que l'intensité lumineuse en un point M est proportionnelle au carré de l'amplitude de la vibration lumineuse (onde électromagnétique) :

$$I(M) \propto A^2$$

En élevant la formule des interférences au carré, on établit l'expression de l'amplitude résultante au carré, pour un éclairement monochromatique de longueur d'onde λ donnée :

$$A_{rés}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2.A_1.A_2.\cos\left(\frac{2.\pi.\delta(M)}{\lambda}\right)$$

Ce qui nous conduit alors à **la formule de Fresnel** :

$$I = I_1 + I_2 + 2.\sqrt{I_1.I_2}.\cos\left(\frac{2.\pi.\delta(M)}{\lambda}\right)$$

où I_1 et I_2 sont les intensités lumineuses relatives à chacune des fentes. Dans le cas particulier où les deux fentes émettent la même intensité lumineuse (situation relativement fréquente en optique) : $I_1 = I_2 = I_0$. La formule de Fresnel devient :

$$I = 2.I_0.\left(1 + 2.\cos\left(\frac{2.\pi.\delta(M)}{\lambda}\right)\right)$$

En optique, la différence de marche $\delta(M)$ est appelée différence de **chemin optique**. Dans un milieu d'indice n :

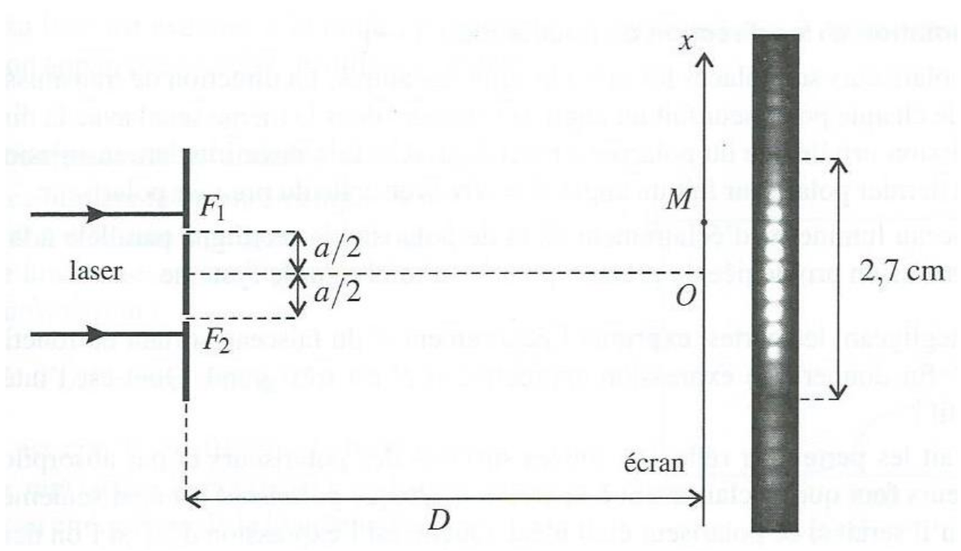
$$\delta(M) = n.(P_1M - P_2M)$$

Dans le dispositif des trous d'Young (cf exercice ci-dessous), on montre que :

$$\delta(M) = \frac{a.x}{D}$$

7) Exercice

L'expérience des fentes de Young est une expérience classique permettant d'observer le phénomène d'interférences lumineuses. Le dispositif comprend un écran opaque percé de deux fentes identiques de très petites largeur $\varepsilon = 0{,}070\ mm$, parallèles entre elles et distantes de $a = 0{,}40\ mm$. On envoie un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda = 633\ nm$ sur les fentes et on place un écran d'observation à la distance $D = 1{,}5\ m$ derrière le dispositif :



Sur l'écran on observe une figure symétrique autour d'un point O, la lumière se répartissant le long d'un axe Ox perpendiculaire aux fentes.

On observe une tache centrale très lumineuse de largeur $2{,}7\ cm$ dont l'éclairement est modulé et des taches latérales, deux fois plus étroites et beaucoup moins lumineuses présentant la même modulation de l'éclairement. Le but de l'exercice est d'interpréter ces observations.

1) On rappelle que pour une diffraction par une fente de largeur a, le demi-diamètre angulaire de la tâche de diffraction est donné par $\sin\theta = \lambda/a$. Exprimer la largeur L de la tache centrale de la figure de diffraction qu'on observerait sur l'écran s'il n'y avait qu'une seule fente de largeur ε. Montrer que les taches centrales de diffraction des deux fentes sont pratiquement confondues.

2) On appelle champ d'interférence l'intersection des taches de diffraction. Il est centré en un point O situé à égale distance des fentes et peut-être considéré d'après la question précédente comme le domaine $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$ de l'axe Ox. Montrer que pour un point M du champ d'interférences et d'abscisse x on a $MF_2 - MF_1 = a.x/D$.

3) Exprimer alors le déphasage entre les deux ondes arrivant en M en fonction de λ, a, D et x. Les deux ondes ont la même phase initiale à leur départ de F_1 et F_2.

4) Trouver les coordonnées des points du champ d'interférences en lesquels il y a interférence constructive. Combien y en a-t-il ? Comparer à la photographie de l'écran.

5) Trouver les coordonnées des points en lesquels il y a interférence destructive. Quelle est la distance entre deux de ces points consécutifs ? Comparer à la photographie de l'écran.

Interférences lumineuses polychromatiques sur une bulle de savon

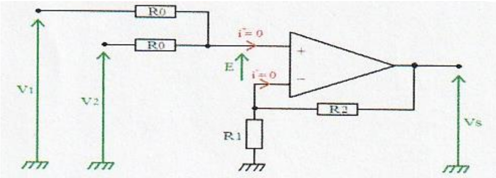
II : Phénomène de battements

1) Expériences

On considère deux diapasons identiques (possédant une même fréquence d'émission). On fixe un petit anneau métallique sur l'un des diapasons. Avec cette contrainte, sa fréquence d'émission est légèrement différente de celle du premier diapason. En frappant les deux diapasons, on entend un son modulé en amplitude au cours du temps… ceci constitue un phénomène de battement d'ondes sonores.

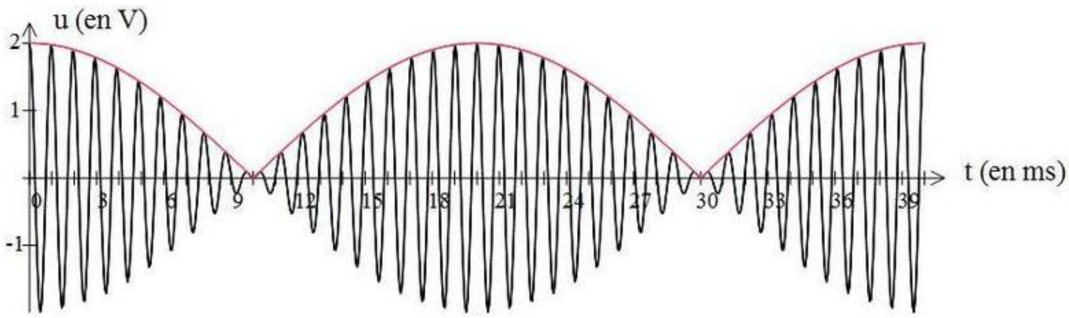
On peut visualiser ce phénomène en superposant deux signaux électriques de fréquences voisines grâce à un montage additionneur (montage additionneur non-inverseur, avec un ALI, cf TP d'électricité).

Deux GBF émettent des ondes sinusoïdales de fréquences voisines. Le montage additionneur permet de superposer ces deux signaux. Grâce à une carte d'acquisition, nous visualisons le signal résultant avec le logiciel Latis Pro. Nous observons un signal électrique modulé en amplitude au cours du temps : ceci constitue un phénomène de battement de signaux électriques.



GBF 1 : f = 1000 Hz, V1 = 5 V
GBF 2 : f = 1100 Hz, V2 = 5 V
$R_0 = R_1 = R_2 = 1k\Omega$

Le signal résultant a l'allure suivante :



On vérifie que le signal résultant est modulé en amplitude au cours du temps.

2) Modélisation

Considérons deux vibrations sinusoïdales qui, en un point M donné sont notées $s_1(M,t)$ et $s_2(M,t)$ (ondes sonores, signaux électriques, ondes lumineuses…). Ces deux vibrations sont de même amplitudes (notée A_0) mais de fréquences voisines notées f_1 et f_2 (avec $f_2 > f_1$ et $\Delta f = f_2 - f_1 \ll f_1$) :

$$\begin{cases} s_1(M,t) = A_0.\cos\left(\omega_1.t + \varphi_1(M)\right) \\ s_2(M,t) = A_0.\cos\left(\omega_2.t + \varphi_2(M)\right) \end{cases}$$

avec $\omega_1 = 2.\pi.f_1$ et $\omega_2 = 2.\pi.f_2$

On note $s(M,t)$ la vibration résultant de la superposition de ces deux signaux au point M :

$$s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t)$$

Rappel formule trigonométrique : $\cos p + \cos q = 2.\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

On pose :

$$\begin{cases} \omega_m = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} \;\; et \; \varphi_m = \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \\ \omega_{mod} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2} \;\; et \; \varphi_{mod} = \dfrac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \end{cases}$$

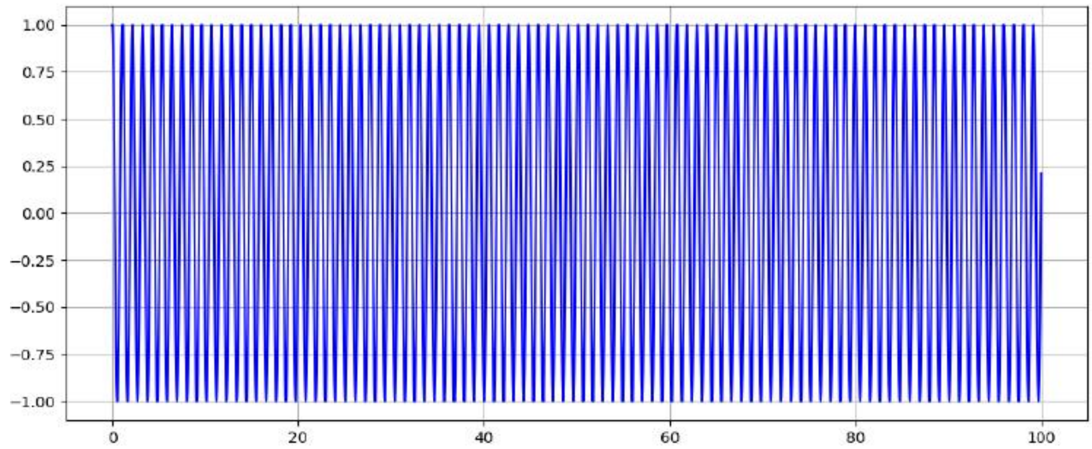
avec ω_m pulsation moyenne et ω_{mod} pulsation de modulation.

Exprimons $s(M,t)$ en fonction de A_0, ω_m, φ_m, ω_{mod} et φ_{mod} :

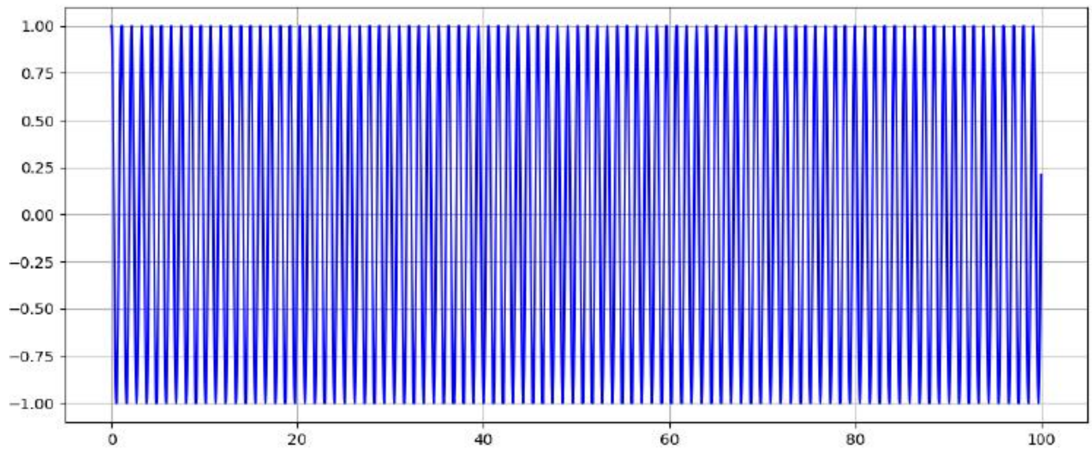
----

3) Allure du signal résultant

En notant que $\omega_m \gg \omega_{mod}$ on peut dire $T_m \ll T_{mod}$. Sur la courbe ci-dessous, nous avons représenté l'allure de la fonction $y_1(M,t) = 2.A_0.\cos(\omega_m.t + \varphi_m)$ pour $2.A_0 = 1$.
Sur ce même graphique, représentons l'allure de la fonction $y_2(M,t) = 2.A_0.\cos(\omega_{mod}.t + \varphi_{mod})$



On en déduit l'allure du signal $s(M,t) = 2.A_0.\cos(\omega_m.t + \varphi_m).\cos(\omega_{mod}.t + \varphi_{mod})$:



4) Fréquence de battement

On note T_{batt} la période de battement. On constate que :

$$T_{batt} = \frac{T_{mod}}{2} \quad \text{donc} \quad f_{batt} = 2.f_{mod}$$

Sachant que :

$$\omega_{mod} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$

En explicitant :

$$2.\pi.f_{mod} = \frac{2.\pi.(f_2 - f_1)}{2} = \frac{2.\pi.f_{batt}}{2}$$

On établit l'expression de la fréquence de battement :

$$\boxed{f_{batt} = f_2 - f_1}$$

Application : ces phénomènes de battements sont utilisés pour accorder certains instruments à cordes (exemple : cordes de piano). Plus les fréquences sont proches, plus la période de battement est grande. Quand l'instrument est accordé, la période de battement est « infinie ».

5) Exercice

Le document ci-dessous représente un phénomène de battement de signaux électriques.

-a- Déterminer les fréquences f_1 et f_2 de ces deux signaux.

-b- Que peut-on dire de l'amplitude de ces deux signaux ? commenter.

-c- Quel serait l'allure du spectre en amplitude du signal résultant ?