

Problème : Cinématique de sports d'hiver

A Saut à ski

A.1 On considère l'axe Ax du segment AB et son vecteur unitaire \vec{u}_x , dirigé de A vers B . En intégrant deux fois l'accélération, on obtient successivement $\vec{v}(M) = a_0 t \vec{u}_x$ et $\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{a}_0}{2} t^2 \vec{u}_x$ (constantes d'intégration nulles).

A.2 Le skieur arrive en B à l'instant t_B telque $\overrightarrow{AM}(t_B) = \overrightarrow{AB}$ soit $t_B = \sqrt{\frac{2L}{a_0}} = 4,6\text{ s}$ et sa vitesse est alors $\vec{v}(M)(t_B) = v_B = \sqrt{2La_0} = 26\text{ m s}^{-1}$.

A.3 On se place en coordonnées polaires de centre O et on définit l'angle θ tel que $\overrightarrow{OM}(\theta = 0) = \overrightarrow{OB} = R\vec{u}_r$. On ainsi $\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r$ et le vecteur vitesse $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.

A.4 Au point B $\theta = 0$, $v_B = R\dot{\theta}(\theta = 0) = R\omega_0\sqrt{\cos\alpha + \beta} = \sqrt{2La_0}$. D'où : $\beta = \frac{2La_0}{R^2\omega_0^2} - \cos\alpha = 2,6$.

A.5 Le vecteur accélération s'écrit $\vec{a}(M) = \frac{d\vec{v}(M)}{dt} = \frac{d(R\dot{\theta})}{dt}\vec{u}_\theta + R\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{u}_r$. En dérivant $\dot{\theta}$ on obtient :

$\ddot{\theta} = \omega_0 \frac{\sin(\alpha - \theta)\dot{\theta}}{2\sqrt{\cos(\alpha - \theta) + \beta}} = \frac{\omega_0^2}{2} \sin(\alpha - \theta)$. D'où : $\vec{a}(M) = \frac{R\omega_0^2}{2} \sin(\alpha - \theta)\vec{u}_\theta - R\omega_0^2(\cos(\alpha - \theta) + \beta)\vec{u}_r$. Le mouvement de M est un mouvement circulaire non uniforme puis que \vec{a} n'est pas perpendiculaire au vecteur \vec{v} .

A.6 Au point C : $\theta = \alpha$. D'où : $\vec{v} = R\omega_0\sqrt{1 + \beta}\vec{u}_X$ avec \vec{u}_X vecteur unitaire horizontal. L'application numérique donne $v = 27\text{ m s}^{-1}$.

B Super G

B.1 La cinématique est l'étude du mouvement d'un point indépendamment des causes qui l'engendrent.

B.2 On a $y(0) = d_0 = A$. De plus on constate que lorsque le skieur est à l'abscisse $2L$, il a la même ordonnée qu'à son départ d'où $\cos(2BL) = 1$ c'est à dire $2BL = 2\pi$ soit $B = \frac{\pi}{L}$. La trajectoire se met alors sous la forme $y(x) = d_0 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$.

B.3 Par intégration on trouve $x(t) = v_0 t$ d'où $y(t) = d_0 \cos\left(\frac{\pi v_0}{L} t\right)$

B.4 En dérivant on obtient $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y = v_0\vec{e}_x - \frac{v_0\pi d_0}{L} \sin\left(\frac{\pi v_0}{L} t\right)\vec{e}_y$ et

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y = -d_0 \left(\frac{v_0\pi}{L}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi v_0}{L} t\right)\vec{e}_y$$

B.5 Pour que le skieur reste en piste, il doit conserver à tout moment une accélération inférieure à $0,7\text{ g}$. Il

faut donc $\left|d_0 \left(\frac{v_0\pi}{L}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi v_0}{L} t\right)\right| \leq 0,7g$ pour tout t c'est à dire $d_0 \left(\frac{v_0\pi}{L}\right)^2 \leq 0,7g$ d'où $L_{min} = v_0\pi \sqrt{\frac{d_0}{0,7g}} = 23\text{ m}$