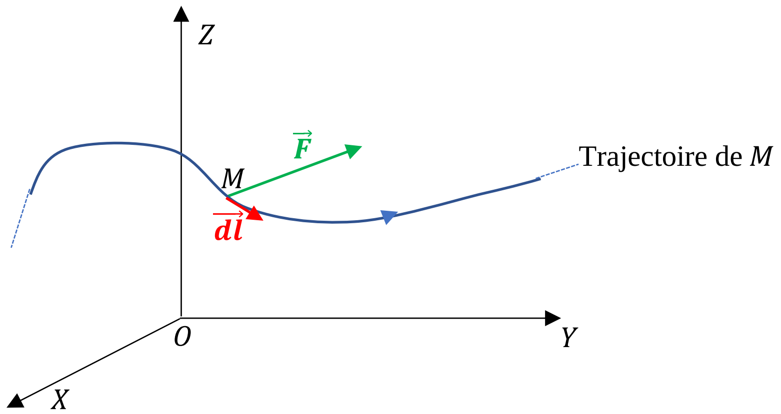
# Chap III : Energie d'un point matériel

**Introduction :** Dans ce chapitre, nous allons étudier l'énergie d'un point matériel (de « exergia » en grec, signifiant « force en action »). Nous définirons le travail et la puissance d'une force. Nous poursuivrons avec la définition d'une force conservative et de la fonction énergie potentielle associée. Après avoir rappelé les définitions des fonctions énergies cinétique et mécanique, nous établirons les théorèmes énergétiques associés. Nous finirons ce chapitre par une étude qualitative de la nature de la trajectoire d'un système conservatif à un degré de liberté à partir du profil de sa fonction énergie potentielle totale (positions d'équilibre et stabilité).

## I : Travail et puissance d'une force

1) Présentation

Considérons un point matériel $M$ (de masse $m$) soumis à l'action d'une force extérieure $\vec{F}$ dans le référentiel $R$ galiléen :




On note $\vec{dl}$ le déplacement élémentaire du point $M$ dans $R$ défini par :

$$\vec{dl} = \overrightarrow{M(t)M(t+dt)} = d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)$$

2) Travail élémentaire d'une force

Entre $t$ et $t+dt$, le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ noté $\delta w$ (lire « delta W » de « work » en anglais) est défini par :

$$\delta w = \vec{F}.\vec{dl}$$

Si $\delta w > 0$, la force $\vec{F}$ est motrice (elle favorise le déplacement du point $M$). Si $\delta w < 0$, la force $\vec{F}$ est résistante (elle s'oppose au déplacement du point $M$). Si $\delta w = 0$, la force $\vec{F}$ ne travaille pas.

**Homogénéité et unité :**

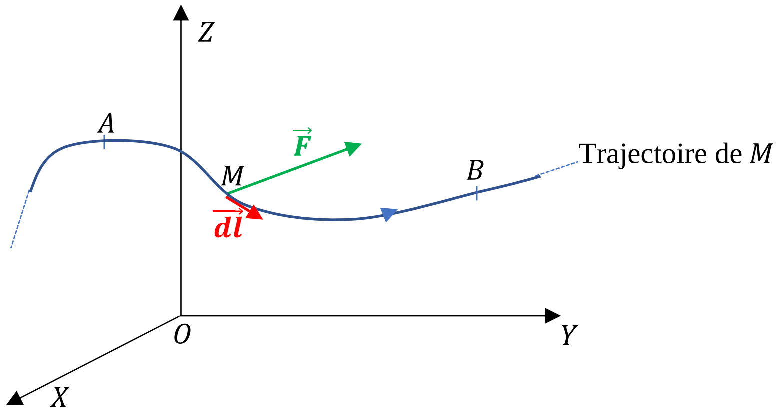
Sachant que l'homogénéité d'une force est : $[\text{Force}] = M.L.T^{-2}$, on vérifie que le travail d'une force est homogène à une énergie : $[\delta w] = [\text{Force}].[\text{distance}] = M.L^2.T^{-2}$. L'unité de travail dans le système international est le Joule ($1\ \text{J} = 1\ \text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}$).

Rq. : Avec $\vec{dl} = d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)$ le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ dépend du référentiel d'étude.

3) Travail d'une force entre deux points

Entre deux points $A$ et $B$, le travail de la force $\vec{F}$ est égal à la somme des travaux élémentaires entre ces deux points :

$$\boxed{w_{A\to B} = \int_A^B \delta w = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl}}$$




4) Travail de plusieurs forces

Supposons désormais que le point matériel $M(m)$ soit soumis à l'action de plusieurs forces extérieures :

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}_{rés}$$

On note $\delta w_{rés} = \vec{F}_{rés}.\overrightarrow{dl}$ le travail élémentaire des forces extérieures. Le travail résultant entre les points $A$ et $B$ est égal à la somme des travaux élémentaires entre ces deux points :

$$w_{rés,A\to B} = \int_A^B \delta w_{rés} = \int_A^B \vec{F}_{rés}.\overrightarrow{dl} = \sum_{i=1}^{N} w_{i,A\to B}$$

avec $w_{i,A\to B} = \int_A^B \vec{F}_i.\overrightarrow{dl}$

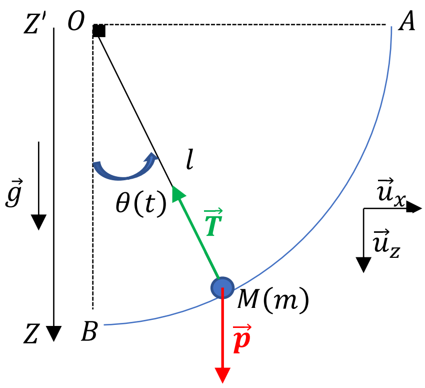
5) Illustration

On considère un pendule simple composé d'un fil inextensible de longueur $l$ (de masse négligeable) et d'un point matériel $M$ de masse $m$. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, nous supposerons que $M$ n'est soumis qu'à son poids $\vec{p}$ et à la tension $\vec{T}$ exercée par le fil.

Déterminons le travail des forces extérieures sur $M$ entre les points $A$ et $B$ :

$$\delta w_{\vec{T}} = \vec{T}.\overrightarrow{dl} = 0$$

La tension $\vec{T}$ exercée par le fil ne travaille pas.



En effet, dans la base de coordonnées polaires : $\vec{T} = -T.\vec{u}_r$ et $\overrightarrow{dl} = l.d\theta.\vec{u}_\theta$.

On vérifie que :

$$\delta w_{\vec{T}} = \vec{T}.\overrightarrow{dl} = (-T.\vec{u}_r).(l.d\theta.\vec{u}_\theta) = 0$$

Déterminons maintenant le travail du poids :

$$\delta w_{\vec{p}} = \vec{p}.\overrightarrow{dl}$$

En projetant dans la base de coordonnées cartésiennes : $\vec{p} = m.\vec{g} = m.g.\vec{u}_z$ et $\overrightarrow{dl} = dx.\vec{u}_x + dz.\vec{u}_z$. On établit que :

$$\delta w_{\vec{p}} = (m.g.\vec{u}_z).(dx.\vec{u}_x + dz.\vec{u}_z) = m.g.dz$$

Entre les points $A$ et $B$ :

$$w_{\vec{p},A\to B} = \int_A^B m.g.dz = m.g.\int_A^B dz = m.g.(z_B - z_A)$$

En notant que $z_B - z_A = l$ :

$$w_{\vec{p},A\to B} = m.g.l$$

On peut noter que le travail du poids ne dépend que de la différence de hauteur entre les deux points $A$ et $B$. On vérifie que le travail du poids de $A \to B$ est moteur : $w_{\vec{p},A\to B} > 0$.

De la même manière, on établirait que le travail du poids de $B \to A$ serait résistant :

$$w_{\vec{p},B\to A} = m.g.(z_A - z_B) = -w_{\vec{p},A\to B} = -m.g.l < 0$$

**Afin de gagner en efficacité**, il est judicieux d'expliciter le déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ dans la base intrinsèque de la force. C'est ce que nous avons fait ci-dessus en explicitant $\overrightarrow{dl}$ en coordonnées polaires pour $\delta w_{\vec{T}}$ et en coordonnées cartésiennes pour $\delta w_{\vec{p}}$.

Pour illustrer cette remarque, reprenons le calcul du travail du poids dans la base de coordonnées polaires :

$$\delta w_{\vec{p}} = \vec{p}.\overrightarrow{dl}$$

Avec $\vec{p} = m.g.\cos\theta\,.\vec{u}_r - m.g.\sin\theta\,.\vec{u}_\theta$ et $\overrightarrow{dl} = l.d\theta.\vec{u}_\theta$ :

$$\delta w_{\vec{p}} = -m.g.l.\sin\theta\,.d\theta$$

Entre les points $A$ et $B$ :

$$w_{\vec{p},A\to B} = \int_A^B -m.g.l.\sin\theta\,.d\theta = -m.g.l.\int_A^B \sin\theta\,.d\theta = m.g.l.[\cos\theta]_A^B$$

En notant que $\theta_A = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_B = 0$ on vérifie que :

$$w_{\vec{p},A\to B} = m.g.l.\left(\cos 0 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = m.g.l$$

On vérifie que ce calcul est plus « laborieux » dans la base de coordonnées polaires !...

6) Puissance d'une force

Considérons un point matériel $M$ de masse $m$ soumis à l'action d'une force extérieure $\vec{F}$ dans le référentiel $R$ galiléen. La puissance de cette force est définie comme étant le travail élémentaire de cette force par unité de temps :

$$\mathcal{P} = \frac{\delta w}{dt}$$

Avec $\delta w = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$ et $\vec{v}(M)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \left(\frac{\overrightarrow{dl}}{dt}\right)_R$ on établit que :

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{\delta w}{dt} = \vec{F}.\vec{v}(M)_R}$$

Si le point matériel $M(m)$ est soumis à l'action de plusieurs forces extérieures :

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}_{rés}$$

la puissance résultante est égale à la somme des puissances des différentes forces :

$$\boxed{\mathcal{P}_{rés} = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{P}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i.\vec{v}(M)_R = \frac{\delta w_{rés}}{dt}}$$

**Homogénéité et unité :**
La puissance est homogène à une énergie par unité de temps : $[\mathcal{P}] = M.L^2.T^{-3}$. Dans les unités du système international, l'unité de puissance est le Watt ($1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{kg.m^2.s^{-3}}$).

Rq. : Comme le travail, la puissance est relative au référentiel d'étude.

## II : Force conservative et énergie potentielle associée

1) Définition

Une force $\vec{F}$ est conservative si le travail de cette force entre deux points $A$ et $B$ ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale $A$ et finale $B$.

Revenons sur l'expression du travail du poids entre les points $A$ et $B$ établie en I-5) :

$$w_{\vec{p},A\to B} = m.g.(z_B - z_A)$$

On constate que le travail du poids entre les points $A$ et $B$ ne dépend pas du chemin suivi pour aller de $A$ à $B$ mais uniquement de la position initiale $A$ et finale $B$ (repérées respectivement par $z_A$ et $z_B$). On en conclut que le poids est une force conservative.

Sur un contour fermé (position initiale et finale $A$) le travail d'une force conservative (notée $\vec{F}^C$) est nul :

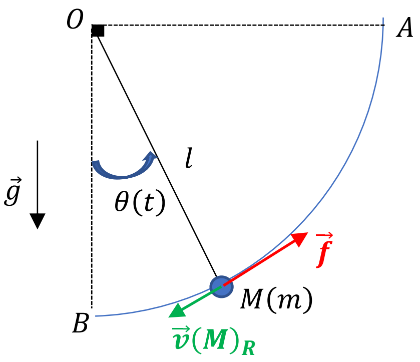
$$\boxed{\oint \vec{F}^C.\overrightarrow{dl} = 0}$$

Cette relation permet de déterminer le caractère conservatif (ou non) d'une force.

**Exemple 1 :** travail du poids sur un « contour fermé » :

$$w_{\vec{p},A\to A} = m.g.(z_A - z_A) = 0$$

**Exemple 2 :** la force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha.\vec{v}(M)_R$ est-elle conservative ?
Supposons que le pendule simple étudié en I-5) soit également soumis à l'action d'une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha.\vec{v}(M)_R$ (avec $\alpha$ coefficient de frottement fluide $\alpha > 0$) :




Entre $t$ et $t + dt$ le travail élémentaire de la force de frottement est : $\delta w_{\vec{f}} = \vec{f}.\overrightarrow{dl} = -\alpha.\vec{v}(M)_R.\overrightarrow{dl}$.
En notant que $\overrightarrow{dl} = \vec{v}(M)_R.dt$ :

$$\delta w_{\vec{f}} = -\alpha.v^2.dt < 0$$

Quel que soit le déplacement élémentaire du point $M$, le travail élémentaire de la force de frottement est négatif… on en déduit que sur un contour fermé (quelconque) le travail de cette force ne peut-être nul, donc la force de frottement fluide est une force non-conservative.

2) Energie potentielle

Compte tenu du fait que le travail d'une force conservative entre deux points $A$ et $B$ dépend uniquement de la position initiale $A$ et finale $B$, le travail de cette force peut s'exprimer sous la forme de l'opposé de la variation d'une fonction, appelée énergie potentielle associée :

$$w^C{}_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}^C.\overrightarrow{dl} = -\left(E_P(B) - E_P(A)\right) = -\Delta E_{P\,A\to B}$$

Cette relation est vérifiée quel que soit le chemin emprunté pour aller du point $A$ au point $B$. Elle est donc vérifiée pour un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ :

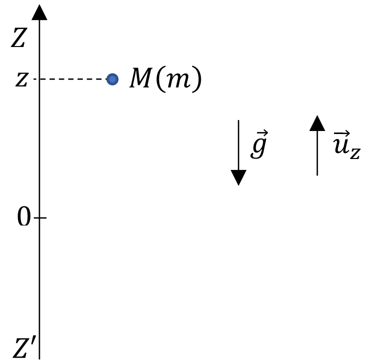
$$\boxed{\delta w^C = \vec{F}^C.\overrightarrow{dl} = -dE_P}$$

Cette relation permet de déterminer la fonction énergie potentielle dont « dérive » une force $\vec{F}$ conservative.

3) Application

-a- Energie potentielle de pesanteur

Nous savons que le poids est une force conservative. Déterminons la fonction énergie potentielle, appelée énergie potentielle de pesanteur (notée $E_{PP}$) dont dérive le poids. Pour cela, considérons un point matériel $M$ de masse $m$ plongé dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ supposé uniforme :




$$\delta w_{\vec{p}} = \vec{p}.\overrightarrow{dl} = -m.g.dz = -dE_{PP}$$

Soit :

$$\frac{dE_{PP}}{dz} = m.g$$

En primitivant, on établit l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur : $E_{PP}(z) = m.g.z + A$ où $A$ est une constante additive définie de manière arbitraire.

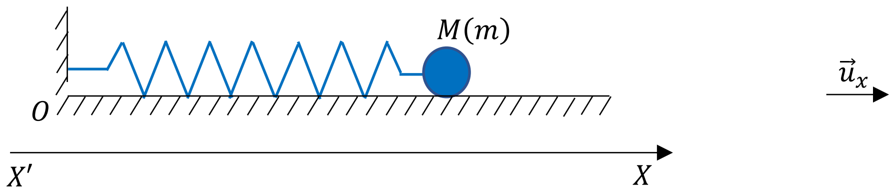
Si on fait l'hypothèse que l'énergie potentielle est nulle pour $z = 0$ alors $A = 0$ et :

$$\boxed{E_{PP}(z) = m.g.z}$$

Rq. : on peut noter que le signe de $\delta w_{\vec{p}}$ (et donc $E_{PP}$) dépend de l'orientation de l'axe $Z'Z$ (cf I-5). Si l'axe $Z'Z$ est orienté dans le même sens que $\vec{g}$ alors $E_{PP}(z) = -m.g.z$. On sera attentif au fait que l'énergie potentielle de pesanteur augmente quand $z$ augmente.

-b- Energie potentielle élastique

Considérons un point matériel $M$ de masse $m$ soumis à l'action d'un ressort de masse négligeable, de longueur à vide $l_0$ et de constante de raideur $k$.




La force de rappel exercée par le ressort sur $M$ est donnée par la loi de Hooke : $\vec{T} = -k.(l(t) - l_0).\vec{u}_x = -k.x(t).\vec{u}_x$ (avec $x(t) = l(t) - l_0$ allongement du ressort). Nous avons vu en début d'année que cette force dérive d'une fonction énergie potentielle élastique $E_{PE} = \frac{1}{2}k.x^2$. Retrouvons cette expression sachant que :

$$\delta w^C = \vec{F}^C.\overrightarrow{dl} = -dE_P$$

En explicitant dans la base de coordonnées cartésiennes :

$$\delta w = \vec{T}.\overrightarrow{dl} = -k.x.dx = -dE_{PE}$$

Soit :

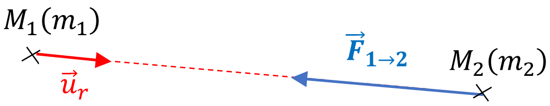
$$\frac{dE_{PE}}{dx} = k.x$$

En primitivant, on établit que : $E_{PE} = \frac{1}{2}k.x^2 + A$ où $A$ est une constante additive définie de manière arbitraire. Si on pose que $E_{PE} = 0$ pour $x = 0$ alors $A = 0$ et on vérifie que :

$$\boxed{E_{PE} = \frac{1}{2}k.x^2}$$

-c- Energie potentielle de gravitation

Soit deux masses ponctuelles $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$ en interaction gravitationnelle. La force $\vec{F}_{1\to 2}$ exercée par $M_1$ sur $M_2$ est donnée par la loi d'attraction universelle (ou 4ème loi de Newton) :




$$\vec{F}_{1\to 2} = -\frac{G.m_1.m_2}{r^2}\vec{u}_r \text{ avec } \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2}$$

avec $r = M_1M_2$ : distance entre les points matériels et $G = 6{,}67.10^{-11}\, m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ constante d'attraction universelle. En faisant l'hypothèse que la force d'attraction gravitationnelle est une force conservative, établissons l'expression de la fonction énergie potentielle de gravitation $E_{PG}$ associée. Posons :

$$\delta w^C = \vec{F}^C.\overrightarrow{dl} = -dE_P$$

En explicitant dans la base de coordonnées polaires :

$$\delta w = \vec{F}_{1\to 2}.\overrightarrow{dl} = -\frac{G.m_1.m_2.dr}{r^2} = -dE_{PG}$$

en posant que $\overrightarrow{dl} = d\left(\overrightarrow{M_1M_2}\right) = dr.\vec{u}_r$

Soit :

$$\frac{dE_{PG}}{dr} = \frac{G.m_1.m_2}{r^2}$$

En primitivant, on établit que :

$$E_{PG} = -\frac{G.m_1.m_2}{r} + A$$

Si on pose que $E_{PG} = 0$ pour $r \to \infty$ alors $A = 0$ et l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle à pour expression :

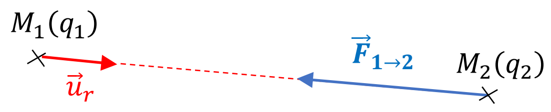
$$\boxed{E_{PG} = -\frac{G.m_1.m_2}{r}}$$

-d- Energie potentielle d'interaction coulombienne

Considérons deux charges ponctuelles $q_1$ et $q_2$ auxquelles on associe les points $M_1$ et $M_2$. Supposons que ces deux charges soient au repos dans le vide à une distance $r = M_1M_2$ dans un référentiel $R$ galiléen. La force d'interaction électrostatique $\vec{F}_{1\to 2}$ exercée par $M_1$ sur $M_2$ est donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{1\to 2} = \frac{q_1.q_2}{4.\pi.\varepsilon_0.r^2}\vec{u}_r \text{ avec } \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2}$$

Schéma pour $q_1.q_2 < 0$ (force attractive) :




où $\varepsilon_0$ est appelée « perméabilité » du vide. Dans les unités S.I. : $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ F.m^{-1}$. Deux charges de même signe $(q_1.q_2 > 0)$ se repoussent et deux charges de signes opposés $(q_1.q_2 < 0)$ s'attirent.

En faisant l'hypothèse que la force d'interaction coulombienne est conservative (cf II-3-b), on établit que :

$$\delta w = \vec{F}_{1\to 2}.\overrightarrow{dl} = \frac{q_1.q_2.dr}{4.\pi.\varepsilon_0.r^2} = -dE_{PC}$$

Soit :

$$\frac{dE_{PC}}{dr} = -\frac{q_1.q_2}{4.\pi.\varepsilon_0.r^2}$$

En primitivant :

$$E_{PC} = \frac{q_1.q_2}{4.\pi.\varepsilon_0.r} + A$$

Si on pose que $E_{PC} = 0$ pour $r \to \infty$ alors $A = 0$ et l'énergie potentielle d'interaction coulombienne a pour expression :

$$\boxed{E_{PC} = \frac{q_1.q_2}{4.\pi.\varepsilon_0.r}}$$

**Exemple :** l'énergie potentielle d'interaction d'un électron $(q = -e)$ avec un proton $(q = e)$ est :

$$E_{PC} = -\frac{e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.r}$$

4) Exercice

Dans un gaz à l'équilibre thermodynamique, l'interaction entre deux atomes (ou molécules) est décrite par l'énergie potentielle de Lennard-Jones (communément appelé « potentiel » de Lennard-Jones) :

$$E_P(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}$$

avec $A$ et $B$ constantes positives et $r$ distance inter atomique (ou moléculaire).

1) Montrer que la fonction $E_P(r)$ admet un minimum et représenter l'allure de la fonction.

2) Déterminer la force $\vec{F}$ dérivant de la fonction $E_P(r)$.

3) Sur l'allure de la fonction $E_P(r)$, préciser dans quel domaine la force résultante est attractive et répulsive.

4) Commentaires : quelles sont les origines de ces forces (cf Principe d'exclusion de Pauli et force de Van Der Waals) ?

**Correction :**

1) La fonction $E_P(r)$ admet un extremum s'il existe une valeur de $r$ pour laquelle : $\frac{dE_P(r)}{dr} = 0$. En explicitant :

$$\frac{dE_P(r)}{dr} = -\frac{12.A}{r^{13}} + \frac{6.B}{r^7}$$

$$\left(\frac{dE_P(r)}{dr}\right)_{r_0} = -\frac{12.A}{{r_0}^{13}} + \frac{6.B}{{r_0}^{7}} = 0$$

Soit :

$$r_0 = \left(\frac{2.A}{B}\right)^{\frac{1}{6}}$$

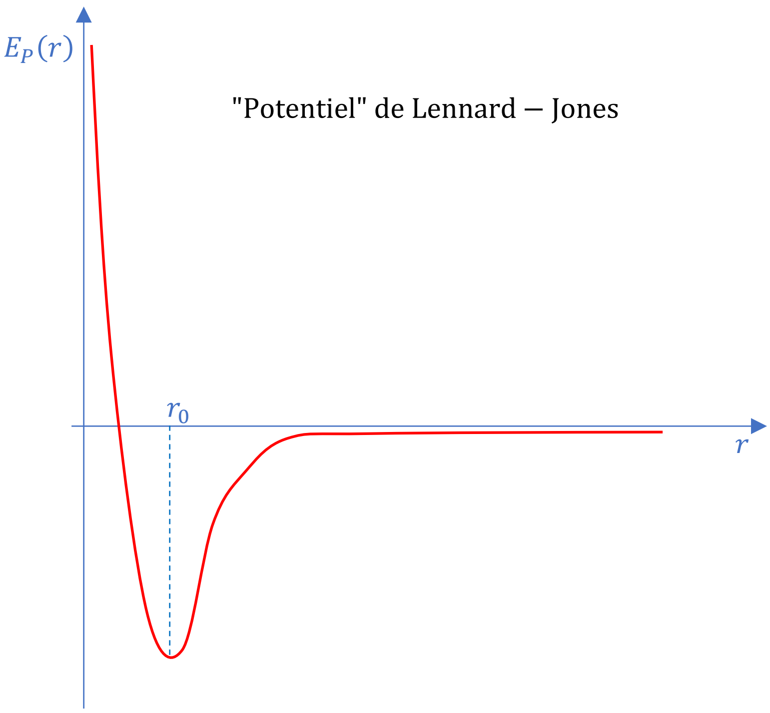
avec $A$ et $B$ constantes positives

On vérifie que $E_P(r)$ admet bien un extremum.

- Pour $r \to 0$, $E_P(r) \sim \frac{A}{r^{12}} \to \infty$
- Pour $r \to \infty$, $E_P(r) \sim -\frac{B}{r^6} \to 0^-$

La fonction $E_P(r)$ admet un minimum pour $r = r_0$.

Allure de la fonction $E_P(r)$ :




2) Posons $\vec{F} = F(r).\vec{u}_r$. Avec $\delta w^C = \vec{F}.\vec{dl} = -dE_P$ :

$$F(r).dr = -dE_P$$

Soit :

$$F(r) = -\frac{dE_P}{dr}$$

En explicitant :

$$F(r) = \frac{12.A}{r^{13}} - \frac{6.B}{r^7}$$

On en déduit que :

$$\vec{F} = \left(\frac{12.A}{r^{13}} - \frac{6.B}{r^7}\right).\vec{u}_r$$

3) La force $\vec{F} = F(r).\vec{u}_r$ décrit l'interaction entre deux atomes ou molécules. Si $F(r) > 0$, la force est répulsive. Si $F(r) < 0$, la force est attractive.

- Pour $r < r_0$, $\frac{dE_P}{dr} < 0$ donc $F(r) = -\frac{dE_P}{dr} > 0$ : la force est répulsive.
- Pour $r > r_0$, $\frac{dE_P}{dr} > 0$ donc $F(r) = -\frac{dE_P}{dr} < 0$ : la force est attractive.

4) Origines de la force $\vec{F} = F(r).\vec{u}_r$ qui dérive du « potentiel » de Lennard-Jones :

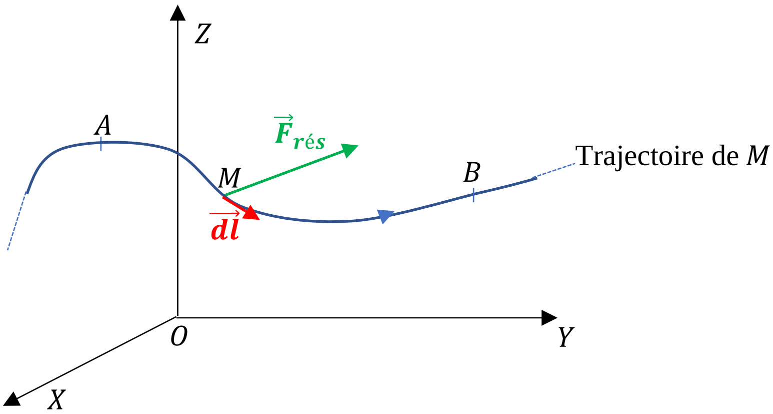
- A courte distance (pour $r < r_0$) : principe d'exclusion de Pauli. Deux électrons ne peuvent être dans le même état quantique. Ceci se traduit par une force répulsive très intense (proportionnelle à $1/r^{13}$) de courte portée.
- A grande distance (pour $r > r_0$) : force de Van-Der-Waals. Les interactions dipolaires (Keesom, London et Debye) ont un effet attractif à « grande distance » dans les fluides.

Ordre de grandeur : $r_0 \sim nm$.

## III : Théorème de l'énergie cinétique

1) Présentation

Considérons un point matériel $M$ de masse $m$ soumis à l'action des forces extérieures $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}_{rés}$ dans un référentiel $R$ galiléen. On note $\vec{p}(M)_R = m.\vec{v}(M)_R$ la quantité de mouvement de $M$ dans $R$ et $E_C(M)_R = \frac{1}{2}m.v(M)_R{}^2 = \frac{1}{2}m.v^2$ son énergie cinétique. Etablissons le théorème de l'énergie cinétique.




2) Théorème de la puissance cinétique

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à $M$ dans $R$ :

$$\left(\frac{d\vec{p}(M)_R}{dt}\right)_R = m.\left(\frac{d\vec{v}(M)_R}{dt}\right)_R = \vec{F}_{rés}$$

Projetons cette relation sur $\vec{v}(M)_R$ :

$$m.\vec{v}(M)_R.\left(\frac{d\vec{v}(M)_R}{dt}\right)_R = \vec{F}_{rés}.\vec{v}(M)_R$$

Avec :

$$\mathcal{P}_{rés} = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{P}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i.\vec{v}(M)_R = \vec{F}_{rés}.\vec{v}(M)_R$$

Et :

$$E_C(M)_R = \frac{1}{2}m.v(M)_R{}^2 = \frac{1}{2}m.\vec{v}(M)_R{}^2$$

$$\left(\frac{dE_C(M)_R}{dt}\right)_R = m.\vec{v}(M)_R.\left(\frac{d\vec{v}(M)_R}{dt}\right)_R$$

On établit le théorème de la puissance cinétique (TPC). La dérivée de l'énergie cinétique par rapport au temps est égale à la puissance des forces extérieures :

$$\boxed{\left(\frac{dE_C(M)_R}{dt}\right)_R = \mathcal{P}_{rés}}$$

3) Théorème de l'énergie cinétique

Avec $\mathcal{P}_{rés} = \frac{\delta w_{rés}}{dt}$ on établit le théorème de l'énergie cinétique entre $t$ et $t + dt$ :

$$dE_C(M)_R = \delta w_{rés}$$

Entre deux points quelconque $A$ et $B$ :

$$\int_A^B dE_C(M)_R = E_C(B) - E_C(A) = \Delta E_{C_{A\to B}}(M)_R$$

$$\int_A^B \delta w_{rés} = \int_A^B \vec{F}_{rés}.\overrightarrow{dl} = w_{rés,A\to B}$$

On établit que :

$$\Delta E_{C_{A\to B}}(M)_R = w_{rés,A\to B}$$

Nous retiendrons les expressions du théorème de l'énergie cinétique (TEC) :

- Entre $t$ et $t + dt$, pour un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ :

$$dE_C(M)_R = \delta w_{rés}$$

- Entre deux points $A$ et $B$ :

$$\Delta E_{C_{A\to B}}(M)_R = w_{rés,A\to B}$$

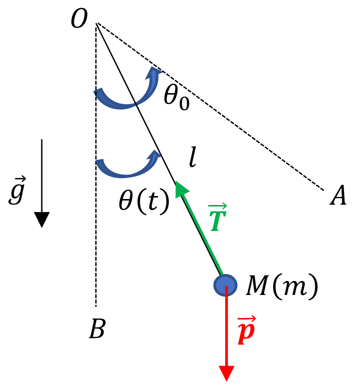
4) Exercice

On considère un pendule simple composé d'un fil inextensible de longueur $l$ (de masse négligeable) et d'un point matériel $M$ de masse $m$. Dans le référentiel terrestre $R$ supposé galiléen, on suppose que $M$ n'est soumis qu'à son poids $\vec{p}$ et à la tension $\vec{T}$ exercée par le fil. On lâche le pendule sans vitesse initiale depuis le point $A$ repéré par l'angle $\theta_0$.

1) Déterminer la vitesse du point $M$ en $B$ à partir du théorème de l'énergie cinétique.

2) Que devient la vitesse pour $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ?

3) Comparer cette vitesse à celle d'une chute libre d'une hauteur $h = l$. Commenter.



**Correction :**

1) Le système $M(m)$ est soumis à deux forces dans le référentiel terrestre supposé galiléen : le poids $\vec{p}$ et à la tension $\vec{T}$ exercée par le fil. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à $M$ entre les points $A$ et $B$ :

$$\Delta E_{C_{A\to B}}(M)_R = w_{\vec{p},A\to B} + w_{\vec{T},A\to B}$$

La tension $\vec{T}$ du fil ne travaille pas ($\delta w_{\vec{T}} = \vec{T}.\vec{dl} = 0$) :

$$\Delta E_{C_{A\to B}}(M)_R = w_{\vec{p},A\to B}$$

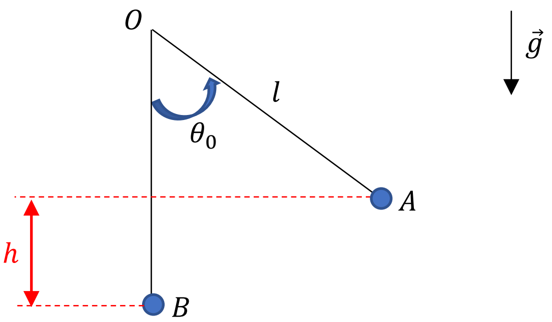
Sachant que la vitesse de $M$ en $A$ est nulle :

$$\Delta E_{C_{A\to B}}(M)_R = E_C(B) - E_C(A) = E_C(B) = \frac{1}{2}m.v^2(B)$$

En explicitant :

$$\frac{1}{2}m.v^2(B) = m.g.h$$

Avec $h$ différence de hauteur entre les points $A$ et $B$, en notant le poids est moteur :



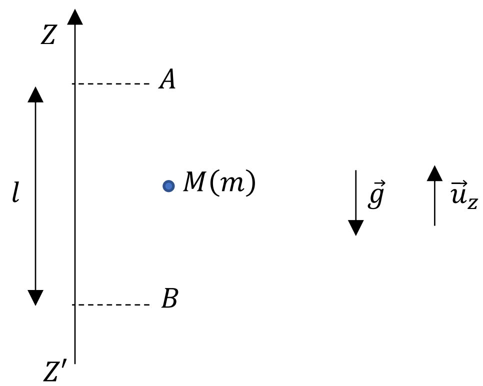

Graphiquement, on constate que : $h = l - l.\cos\theta_0 = l.(1 - \cos\theta_0)$. Soit :

$$v(B) = \sqrt{2.g.l.(1 - \cos\theta_0)}$$

2) Pour $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ : $v(B) = \sqrt{2.g.l}$

3) Pour une chute libre d'une hauteur $h = l$ :

$$\Delta E_{C_{A\to B}}(M)_R = w_{\vec{p},A\to B} = m.g.l$$




Avec une vitesse initiale nulle en $A$ :

$$\Delta E_{C_{A\to B}}(M)_R = E_C(B) = \frac{1}{2}m.v^2(B)$$

On établit que :

$$\frac{1}{2}m.v^2(B) = m.g.l$$

On constate que : $v(B) = \sqrt{2.g.l}$. Pour le pendule simple comme pour la chute libre, le travail des forces extérieur est le même donc la norme de la vitesse est la même… le fil modifie le sens du vecteur vitesse.

# IV : Théorème de l'énergie mécanique

1) Energie mécanique

On considère un point matériel $M$ de masse $m$ soumis à l'action des forces extérieures $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}_{rés}$ dans un référentiel $R$ galiléen. Par définition, l'énergie mécanique de $M$ dans $R$ notée $E_m(M)_R$ est :

$$\boxed{E_m(M)_R = E_C(M)_R + E_{Ptot}}$$

où $E_{Ptot}$ est l'énergie potentielle totale de $M$.

2) Théorème de l'énergie mécanique

Supposons qu'une partie des forces s'exerçant sur $M$ soit conservative. On note : $\vec{F}_{rés} = \vec{F}_{rés}^{c} + \vec{F}_{rés}^{n.c}$ avec $\vec{F}_{rés}^{c}$ résultante des forces conservatives et $\vec{F}_{rés}^{n.c}$ résultante des forces non-conservatives s'exerçant sur $M$ dans $R$. On note $\delta w_{rés}^{c}$ et $\delta w_{rés}^{n.c}$ les travaux élémentaires des forces conservatives et non-conservatives définis par :

$$\delta w_{rés}^{c} = \vec{F}_{rés}^{c}.\overrightarrow{dl}$$
$$\delta w_{rés}^{n.c} = \vec{F}_{rés}^{n.c}.\overrightarrow{dl}$$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à $M$ entre $t$ et $t + dt$ :

$$dE_C(M)_R = \delta w_{rés} = \delta w_{rés}^{c} + \delta w_{rés}^{n.c}$$

Par définition :

$$\delta w_{rés}^{c} = \vec{F}_{rés}^{c}.\overrightarrow{dl} = -dE_{Ptot}$$

Soit :

$$d(E_C(M)_R + E_{Ptot}) = \delta w_{rés}^{n.c}$$

Avec $E_m(M)_R = E_C(M)_R + E_{Ptot}$ on établit le théorème de l'énergie mécanique (TEM), entre $t$ et $t + dt$ (généralisable à deux points $A$ et $B$ comme le théorème de l'énergie cinétique) :

$$\boxed{dE_m(M)_R = \delta w_{rés}^{n.c}}$$

3) Théorème de la puissance mécanique

Soit $\mathcal{P}_{rés}^{n.c}$ la puissance résultante des forces non-conservatives définie par :

$$\mathcal{P}_{rés}^{n.c} = \frac{\delta w_{rés}^{n.c}}{dt}$$

Par unité de temps, le théorème de l'énergie mécanique conduit au théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m(M)_R}{dt} = \mathcal{P}_{rés}^{n.c}$$

4) Intégrale première de l'énergie cinétique

Supposons que le travail élémentaire des forces non-conservatives soit nul : $\delta w_{rés}^{n.c} = 0$.

Pour cela, soit :

- le système n'est soumis qu'à l'action de forces conservatives.
- le système est soumis à l'action de forces non-conservatives mais celles-ci ne travaillent pas.

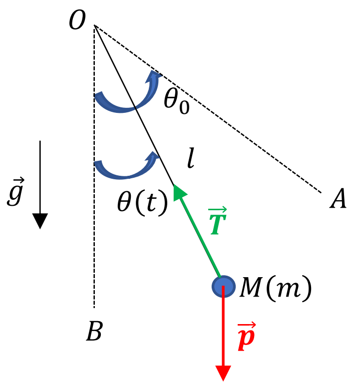
Alors :

$$dE_m(M)_R = 0$$

L'énergie mécanique de $M$ dans $R$ est constante. Ceci constitue l'intégrale première de l'énergie cinétique :

> Si le travail élémentaire des forces non-conservatives est nul ($\delta w_{rés}^{n.c} = 0$) alors l'énergie mécanique de $M$ dans $R$ est constante :
>
> $$E_m(M)_R = E_C(M)_R + E_{Ptot} = \text{cte}$$

**Illustration :** Reprenons l'exercice étudié en III-4, question 1).
On considère un pendule simple composé d'un fil inextensible de longueur $l$ (de masse négligeable) et d'un point matériel $M$ de masse $m$. Dans le référentiel terrestre $R$ supposé galiléen, on suppose que $M$ n'est soumis qu'à son poids $\vec{p}$ et à la tension $\vec{T}$ exercée par le fil. On lâche le pendule sans vitesse initiale depuis le point $A$ repéré par l'angle $\theta_0$.
1) Montrer que l'énergie mécanique de $M$ est constante.
2) Déterminer la vitesse du point $M$ en $B$.




**Correction :**
1) Le système $M$ de masse $m$ est observé dans le référentiel terrestre $R$ supposé galiléen. Dans ce référentiel, $M$ est soumis à son poids qui est une force conservative et à la tension $\vec{T}$ qui ne travaille pas. Donc le travail des forces extérieures non-conservative est nul ($\delta w_{rés}^{n.c} = 0$) et l'énergie mécanique de $M$ dans $R$ est constante :

$$E_m(M)_R = \text{cte}$$

2) En appliquant l'intégrale première de l'énergie cinétique : $E_m(A) = E_m(B)$. En explicitant :

$$E_C(A) + E_{PP}(A) = E_C(B) + E_{PP}(B)$$

En posant arbitrairement que l'énergie potentielle de pesanteur est nulle en $B$, sachant que la vitesse est nulle en $A$ on établit que :

$$E_{PP}(A) = E_C(B)$$

En explicitant :

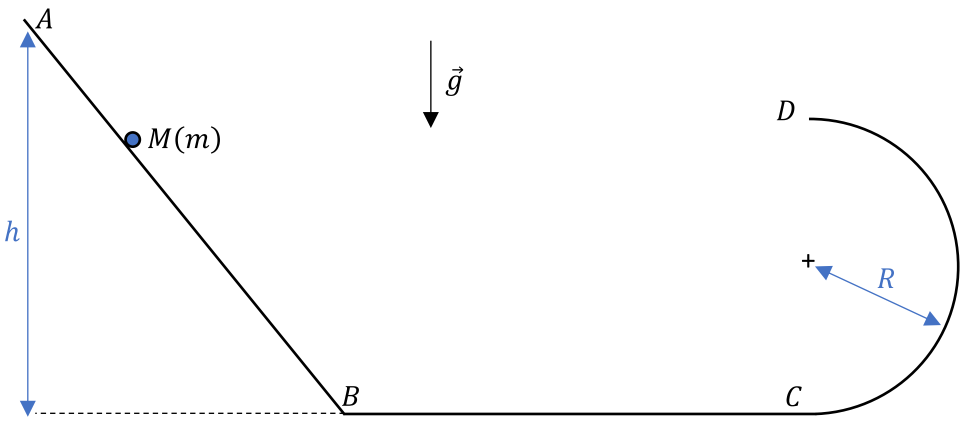
$$m.g.l.(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}m.v^2(B)$$

On vérifie que :

$$v(B) = \sqrt{2.g.l.(1 - \cos\theta_0)}$$

5) Exercice

On considère une bille assimilée à un point matériel $M$ de masse $m$ observé dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On lâche la bille sa vitesse initiale depuis le point $A$ une hauteur $h$ au-dessus du sol. Dans toute cette étude, nous négligerons les phénomènes dissipatifs (forces de frottement solide et fluide).




1) Que peut-on dire de l'énergie mécanique de $M$ dans cette étude ? Justifier.
2) Déterminer la vitesse de $M$ en $B$, en $C$ et en $D$.
3) Quelle serait la vitesse en un point $M$ quelconque repéré par l'angle $\theta(t)$ dans la gouttière ?
4) On note $\vec{N}$ la réaction de la gouttière sur $M$. A quelle condition sur $\vec{N}$ le point matériel $M$ peut-il effectuer un « looping » dans la gouttière ?
5) Déterminer la valeur minimale de $h$ (notée $h_{min}$) pour que le point matériel $M$ puisse effectivement faire un « looping » dans la gouttière.

**Correction :**

1) Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le système est soumis à deux forces : son poids $\vec{p}$ et la réaction du support $\vec{N}$. En négligeant la force de frottement solide, la réaction $\vec{N}$ est normale au support donc elle ne travaille pas :

$$\delta w_{\vec{N}} = \vec{N}.\vec{dl} = 0$$

Le poids est une force conservative, donc le travail des forces non-conservatives est nul ($\delta w_{rés}^{n.c} = 0$) et l'énergie mécanique de $M$ est constante :

$$E_m(M)_R = \text{cte}$$

2) Nous savons que : $E_m(A) = E_m(B) = E_m(C) = E_m(D)$. Faisons le choix arbitraire que l'énergie potentielle de pesanteur est nulle en $(B)$ respectivement $(C)$ :

$$E_m(A) = E_C(A) + E_{PP}(A) = m.g.h$$

$$E_m(B) = E_C(B) + E_{PP}(B) = \frac{1}{2}m.v^2(B)$$

$$E_m(C) = E_C(C) + E_{PP}(C) = \frac{1}{2}m.v^2(C)$$

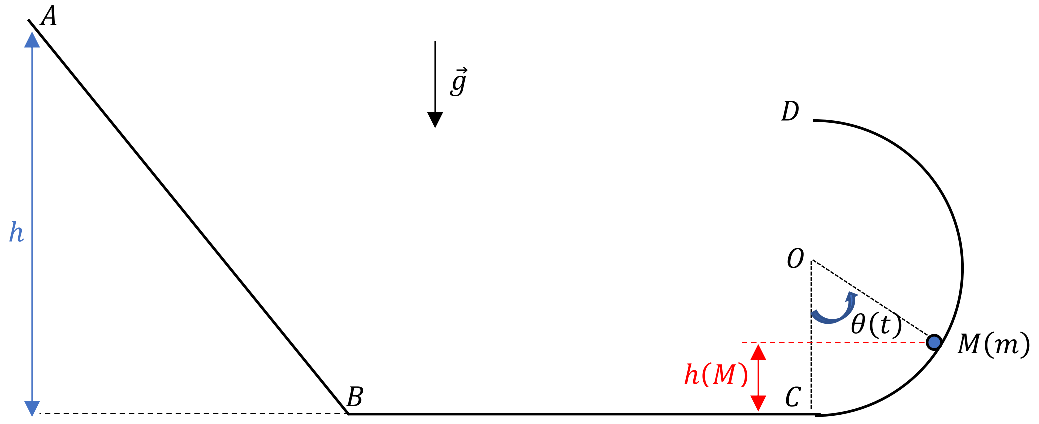
$$E_m(D) = E_C(D) + E_{PP}(D) = \frac{1}{2}m.v^2(D) + m.g.(2.R)$$

On en déduit que :

$$v(B) = v(C) = \sqrt{2.g.h}$$
$$v(D) = \sqrt{2.g.(h - 2.R)}$$

Relation vérifiée pour $h > 2.R$.

3)




De la même manière, en un point $M$ quelconque dans la gouttière :

$$E_m(M) = E_C(M) + E_{PP}(M) = E_m(A) = m.g.h$$

Avec :

$$E_{PP}(M) = m.g.h(M) = m.g.R.(1 - \cos\theta)$$

Soit :

$$\frac{1}{2}m.v^2(M) + m.g.R.(1 - \cos\theta) = m.g.h$$

$$v(M) = \sqrt{2.g.\big(h + R.(\cos\theta - 1)\big)}$$

Rq. : On vérifie que pour $\theta = 0$, $v(M) = \sqrt{2.g.h} = v(B) = v(C)$ et pour $\theta = \pi$, $v(M) = \sqrt{2.g.(h - 2.R)} = v(D)$.

4) Pour que le point matériel $M$ puisse effectuer un « looping » dans la gouttière, il faut qu'à tout moment il soit en contact avec la gouttière. Ceci implique qu'à tout moment, la gouttière exerce une force sur $M$ donc $\vec{N} \neq \vec{0}$. La condition limite est telle que la force exercée par la gouttière sur $M$ au point $D$ soit nulle :

$$\vec{N}(D) = \vec{0}$$

5) Appliquons le principe fondamental de la dynamique à $M$ dans le référentiel terrestre :

$$m.\vec{a}(M) = \vec{p} + \vec{N}$$

Au point $D$, à la limite de « looping », dans la base de coordonnées polaires, la relation devient :

$$m.\left(-\frac{v_{lim}^2(D)}{R}\right).\vec{u}_r = -m.g.\vec{u}_r$$

En projetant sur $\vec{u}_r$ :

$$v_{lim}(D) = \sqrt{g.R}$$

En explicitant :

$$\sqrt{g.R} = \sqrt{2.g.(h_{lim} - 2.R)}$$

On établit que :

$$h_{lim} = \frac{5.R}{2}$$

On en déduit que la hauteur $h \geq h_{lim} = \frac{5.R}{2}$ pour que $M$ puisse effectivement effectuer un « looping » dans la gouttière.

## V : Positions d'équilibre et stabilité

1) Présentation

Considérons un point matériel $M$ de masse $m$ observé dans un référentiel $R$ galiléen. Supposons que $M$ ne possède qu'un degré de liberté, noté $x$. Le degré de liberté correspond au nombre de coordonnées nécessaires et suffisantes pour définir la position de $M$ dans $R$. On note $E_{Ptot}(x)$ la fonction énergie potentielle totale de $M$. Supposons que le système soit conservatif ($\delta w_{rés}^{n.c} = 0$) :

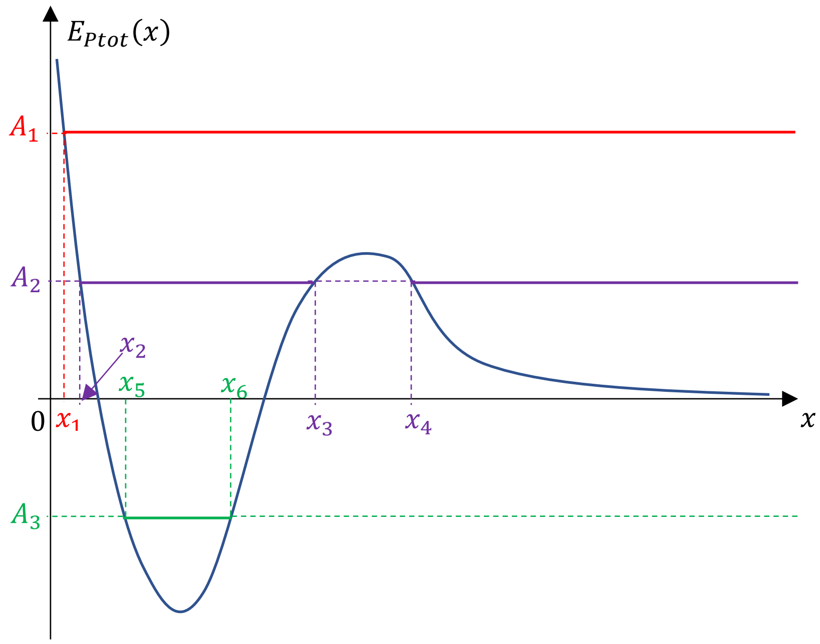
$$E_m(M)_R = E_C(M)_R + E_{Ptot}(x) = \text{cte}$$

Sachant que $E_C(M)_R = \frac{1}{2}m.v^2 \geq 0$, si on note $E_m(M)_R = \text{cte} = A$, il est possible de décrire qualitativement la nature de la trajectoire de $M$ dans $R$ à partir de l'allure de la fonction $E_{Ptot}(x)$ en posant que :

$$\boxed{E_C(M)_R = A - E_{Ptot}(x) \geq 0}$$

2) Approche qualitative de la nature de la trajectoire

Supposons que la fonction énergie potentielle totale $E_{Ptot}(x)$ ait l'allure suivante :




- Si $E_m(M)_R = A_1$, sachant que $E_C(M)_R = A_1 - E_{Ptot}(x) \geq 0$ on peut dire que : $x \in [x_1; \infty[$.
  On dit que le système est dans un état libre (ou état de diffusion).
  Pour $x = x_1$, $E_{Ptot}(x_1) = A_1$ donc $E_C(M)_R = 0$ : la vitesse de $M$ dans $R$ est nulle.

- Si $E_m(M)_R = A_2$, avec $E_C(M)_R = A_2 - E_{Ptot}(x) \geq 0$ de la même manière on peut dire que :
  soit : $x \in [x_2\,; x_3]$ : le système est dans un état lié. Il est piégé dans un puits de potentiel.
  soit : $x \in [x_4; \infty[$ : le système est dans un état libre
  C'est les conditions initiales imposées au système qui le plonge soit dans un état libre, soit dans un état lié. En $x_2$ ; $x_3$ et $x_4$ : la vitesse de $M$ dans $R$ est nulle.

- Si $E_m(M)_R = A_3$, avec $E_C(M)_R = A_3 - E_{Ptot}(x) \geq 0$, le système est dans un état lié avec $x \in [x_5; x_6]$, piégé dans un puits de potentiel. En $x_5$ et $x_6$ : la vitesse de $M$ dans $R$ est nulle.

On vérifie qu'il est possible de décrire qualitativement la nature de la trajectoire d'un système conservatif à un degré de liberté.

3) Positions d'équilibre

Pour un système conservatif : $\delta w_{rés} = \delta w_{rés}^{c} + \delta w_{rés}^{n.c} = \delta w_{rés}^{c}$ avec $\delta w_{rés}^{nc} = 0$. En explicitant :

$$\delta w_{rés} = \vec{F}_{rés}.\vec{dl} = \delta w_{rés}^{c} = -dE_{Ptot}(x)$$

Posons $\vec{dl} = dx.\vec{u}_x$ et $\vec{F}_{rés} = F_{rés}.\vec{u}_x$. On établit que :

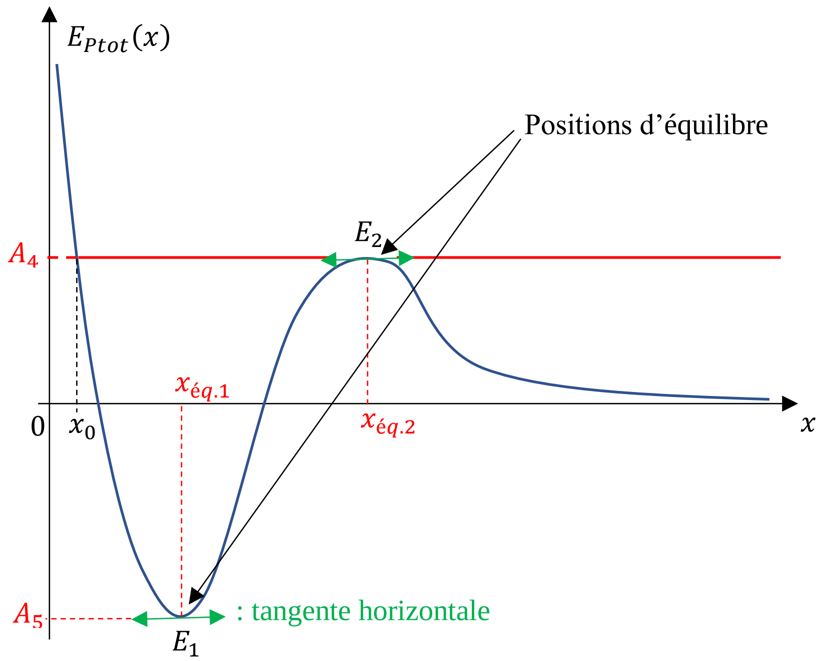
$$\boxed{F_{rés} = -\frac{dE_{Ptot}(x)}{dx}}$$

Sachant qu'à l'équilibre, la somme des forces s'exerçant sur $M$ dans le référentiel $R$ est nulle : $\vec{F}_{rés} = \vec{0}$

On en déduit que les extremums (minimums et maximums) de la fonctions $E_{Ptot}(x)$ sont des positions d'équilibre du système, notée $x_{éq}$:

$$\boxed{F_{rés} = -\left(\frac{dE_{Ptot}(x)}{dx}\right)_{x_{éq}} = 0}$$

**Illustration :** On note $E_1$ et $E_2$ les positions d'équilibre du système



4) Stabilité d'une position d'équilibre

Que peut-on dire de la stabilité des positions d'équilibre $E_1$ et $E_2$ ?

- Si $E_m(M)_R = A_4$, avec $E_C(M)_R = A_4 - E_{Ptot}(x) \geq 0$, le système est soit dans un état lié pour $x \in [x_0;\ x_{éq.2}]$ soit dans un état libre dans l'intervalle $x \in [x_{éq.2};\ \infty[$. Dans le cas particulier ou $x = x_{éq.2}$ : le système est à l'équilibre (vitesse nulle et $\vec{F}_{rés} = \vec{0}$). Si on « écarte très légèrement » $M$ de sa position d'équilibre, il bascule soit dans un état lié pour $x \in [x_0;\ x_{éq.2}]$, soit dans un état libre pour $x \in [x_{éq.2};\ \infty[$… on en déduit que la position d'équilibre $E_2$ est une position d'équilibre instable.
  **Exemple :** une bille posée au sommet d'une sphère. Si on écarte la bille de sa position d'équilibre, elle s'échappe de cette position.

- Si $E_m(M)_R = A_5$ alors $x = x_{éq.1}$ et $E_C(M)_R = A_5 - E_{Ptot}(x) = 0$. Le système est à l'équilibre (vitesse nulle et $\vec{F}_{rés} = \vec{0}$). Si on « écarte très légèrement » $M$ de sa position d'équilibre, il reste piégé dans un puits de potentiel au voisinage de $x_{éq.1}$. On en déduit que la position d'équilibre $E_1$ est une position d'équilibre stable.
  **Exemple :** une bille posée au fond d'une sphère creuse. Si on écarte la bille de sa position d'équilibre, elle oscille au voisinage de sa position d'équilibre.

Nous retiendrons que si la fonction énergie potentielle $E_{Ptot}(x)$ est :

- convexe au voisinage d'une position d'équilibre (ex. $E_1$) alors la position d'équilibre est stable :

$$\left(\frac{d^2E_{Ptot}(x)}{dx^2}\right)_{x_{éq}} > 0 \ : \textbf{équilibre stable}$$

- concave au voisinage d'une position d'équilibre (ex. $E_2$) alors la position d'équilibre est instable :

$$\left(\frac{d^2E_{Ptot}(x)}{dx^2}\right)_{x_{éq}} < 0 \ : \textbf{équilibre instable}$$

5) Approximation locale de l'oscillateur harmonique

Etudions les petits mouvements d'un système conservatif au voisinage d'une position d'équilibre stable notée $x_{éq}$. Que peut-on dire de $E_{Ptot}(x)$ au voisinage de $x_{éq}$ ?

On montre que pour $x \to x_{éq}$ :

$$E_{Ptot}(x) = E_{Ptot}(x_{éq}) + (x - x_{éq}).\left(\frac{dE_{Ptot}(x)}{dx}\right)_{x_{éq}} + \frac{(x - x_{éq})^2}{2\,!}\left(\frac{d^2E_{Ptot}(x)}{dx^2}\right)_{x_{éq}}$$

Sachant que $x_{éq}$ est une position d'équilibre stable :

$$\left(\frac{dE_{Ptot}(x)}{dx}\right)_{x_{éq}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{d^2E_{Ptot}(x)}{dx^2}\right)_{x_{éq}} > 0$$

Soit :

$$E_{Ptot}(x) = E_{Ptot}(x_{éq}) + \frac{(x - x_{éq})^2}{2\,!}\left(\frac{d^2E_{Ptot}(x)}{dx^2}\right)_{x_{éq}}$$

Avec $E_m(M)_R = E_C(M)_R + E_{Ptot}(x) = \text{cte}$, en explicitant l'énergie mécanique :

$$E_m(M)_R = \frac{1}{2}m.\dot{x}^2 + E_{Ptot}(x_{éq}) + \frac{(x - x_{éq})^2}{2\,!}\left(\frac{d^2E_{Ptot}(x)}{dx^2}\right)_{x_{éq}} = \text{cte}$$

Posons $\varepsilon = x - x_{éq}$. En notant que $\dot{\varepsilon} = \dot{x}$ :

$$E_m(M)_R = \frac{1}{2}m.\dot{\varepsilon}^2 + E_{Ptot}(x_{éq}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2.\left(\frac{d^2E_{Ptot}(x)}{dx^2}\right)_{x_{éq}}$$

En dérivant par rapport au temps :

$$m.\dot{\varepsilon}.\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{d^2E_{Ptot}(x)}{dx^2}\right)_{x_{éq}}.\varepsilon.\dot{\varepsilon} = 0$$

En divisant par $(m.\dot{\varepsilon})$, on établit l'équation différentielle :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{1}{m}\left(\frac{d^2E_{Ptot}(x)}{dx^2}\right)_{x_{éq}}.\varepsilon = 0$$

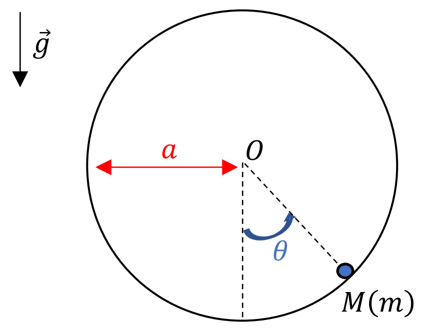
Avec $\left(\frac{d^2E_{Ptot}(x)}{dx^2}\right)_{x_{éq}} > 0$ posons $\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{d^2E_{Ptot}(x)}{dx^2}\right)_{x_{éq}}}$ on reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique :

$$\boxed{\ddot{\varepsilon} + \omega^2.\varepsilon = 0}$$

Nous retiendrons qu'au voisinage d'une position d'équilibre stable, le système est assimilable à un oscillateur harmonique. Nous aurons l'occasion d'illustrer cette notion régulièrement au cours de l'année, et tout particulièrement en fin d'année dans « l'induction électromagnétique ».

6) Exercice

On considère une bille assimilée à un point matériel $M$ de masse $m$ observé dans le référentiel terrestre $R$ supposé galiléen. On place cette bille dans une sphère creuse de rayon $a$. Dans cette étude, nous négligerons tous les phénomènes dissipatifs.




1) Que peut-on dire de l'énergie mécanique de $M$ dans $R$ ? Justifier.

2) On fait le choix que la fonction énergie potentielle $E_P(\theta)$ est nulle pour $\theta = 0$. Déterminer l'expression de $E_P(\theta)$ et représenter son allure.

3) Commenter l'allure de $E_P(\theta)$ au voisinage de $\theta = 0$.

4) Expliciter l'énergie mécanique de $M$ dans $R$ en fonction des données.

5) On montre que pour $\theta \ll 1$ : $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + o.(\theta^2)$. Montrer que $M$ est assimilable à un oscillateur harmonique au voisinage de sa position d'équilibre et déterminer sa période d'oscillation.

6) On lance $M$ avec une vitesse $\vec{v}_0$ horizontale depuis sa position d'équilibre. Quelle doit-être cette vitesse pour que $M$ puisse effectuer un tour complet dans la sphère ?

**Correction :**

1) Le système est observé dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à son poids $\vec{p}$ ainsi qu'à la réaction $\vec{N}$ exercée par la sphère sur $M$. Le poids est une force conservative. En négligeant les phénomènes dissipatifs, à tout instant la réaction $\vec{N}$ est normale au support donc elle ne travaille pas :

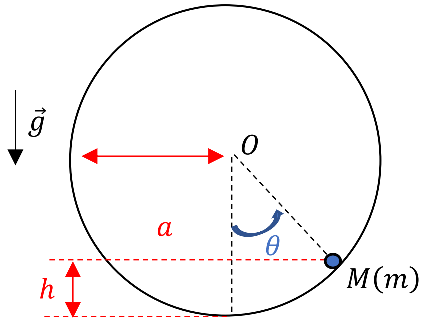
$$\delta w_{\vec{N}} = \vec{N}.\vec{dl} = 0$$

Le travail des forces non-conservatives est nul ($\delta w_{rés}^{n.c} = 0$) et l'énergie mécanique de $M$ est constante :

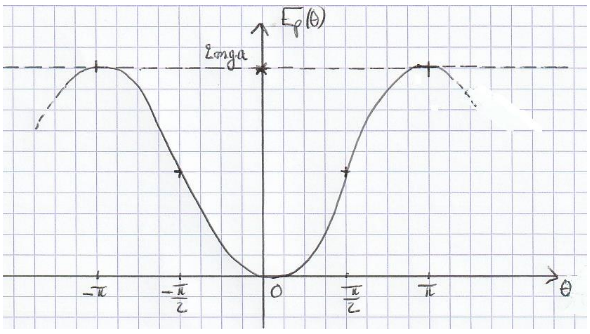
$$E_m(M)_R = \text{cte}$$

2) L'énergie potentielle du système s'identifie à son énergie potentielle de pesanteur. En faisant l'hypothèse que l'énergie potentielle est nulle pour $\theta = 0$ :

$$E_P(\theta) = m.g.h = m.g.a.(1 - \cos\theta)$$




Allure de $E_P(\theta)$ :




3) On vérifie que $E_P(\theta)$ est convexe (minimum) au voisinage de $\theta = 0$ : position d'équilibre est stable.

4) Explicitons l'énergie mécanique : $E_m(M)_R = E_C(M)_R + E_P(\theta) = \text{cte}$.

Avec $E_C(M)_R = \frac{1}{2}m.v^2(M)_R = \frac{1}{2}m.\left(a.\dot{\theta}\right)^2$ :

$$E_m(M)_R = \frac{1}{2}m.\left(a.\dot{\theta}\right)^2 + m.g.a.(1 - \cos\theta)$$

5) Avec $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + o.(\theta^2)$ :

$$E_m(M)_R = \frac{1}{2}m.\left(a.\dot{\theta}\right)^2 + m.g.a.\left(\frac{\theta^2}{2}\right) = \text{cte}$$

En dérivant par rapport au temps :

$$m.a^2.\dot{\theta}.\ddot{\theta} + m.g.a.\theta.\dot{\theta} = 0$$

Soit l'équation différentielle du mouvement :

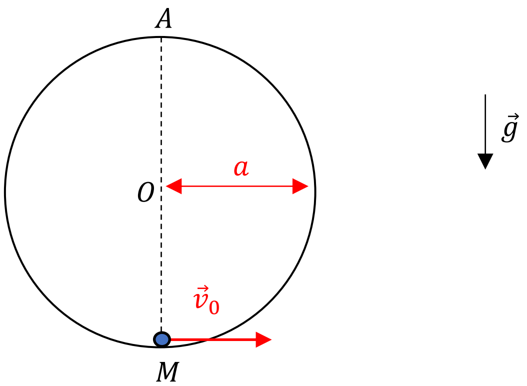
$$\ddot{\theta} + \omega^2.\theta = 0$$

$$\text{avec } \omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$$

On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. La solution de cette équation différentielle est du type $\theta(t) = A.\cos(\omega.t + \varphi)$. La période d'oscillation est :

$$T = \frac{2.\pi}{\omega} = 2.\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

6) Pour que $M$ puisse effectuer un tour complet dans la sphère, il faut qu'au sommet de sa trajectoire, à la limite, la réaction du support soit nulle : $\vec{N}(A) = \vec{0}$.




En appliquant le PFD, au point $A$, à la limite, en projetant sur $\vec{u}_r$ on établit que :

$$m\left(-\frac{v_{lim}^2(A)}{a}\right) = -m.g$$

Soit :

$$v_{lim}(A) = \sqrt{g.a}$$

Sachant que l'énergie mécanique de $M$ est constante :

$$\frac{1}{2}m.v_0^2 = m.g.(2.a) + \frac{1}{2}m.v_{lim}^2(A)$$

En explicitant :

$$\frac{1}{2}m.v_0^2 = 2.m.g.a + \frac{1}{2}m.g.a$$

Soit :

$$v_0 = \sqrt{5.g.a}$$