Synthèse chapitre 3 : Energie d'un point matériel

Extrait du B.O. PCSI-2021 :

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.3 Approche énergétique du mouvement d'un point matériel	
Puissance, travail et énergie cinétique Puissance et travail d'une force dans un référentiel.	Reconnaitre le caractère moteur ou résistant d'une force.
Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen, dans le cas d'un système modélisé par un point matériel.	Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.
Champ de force conservative et énergie potentielle Energie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle. Gradient.	Etablir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique. Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie. Déduire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associé.
Energie mécanique Energie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif.	Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaitre les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.
Mouvement conservatif à une dimension	Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
Positions d'équilibre. Stabilité.	Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.
Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.	Etablir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non-linéaire et faire apparaitre l'effet des termes non-linéaires.

Formulaire : Soit M un point matériel de masse m observé dans un référentiel R galiléen.
Supposons que dans ce référentiel, M soit soumis à l'action d'une force $\vec{F}$. Le travail élémentaire de $\vec{F}$ est donné par :

$$\boxed{\delta w = \vec{F}.\overrightarrow{dl}}$$

avec $\overrightarrow{dl} = \vec{v}(M)_R.dt$ déplacement élémentaire de M dans le référentiel R entre t et $t + dt$.

- si $\delta w = \vec{F}.\overrightarrow{dl} > 0$: la force $\vec{F}$ est motrice
- si $\delta w = \vec{F}.\overrightarrow{dl} < 0$: la force $\vec{F}$ est résistante
- si $\delta w = 0$: $\vec{F}$ ne travaille pas.

Entre deux points M_1 et M_2 le travail de $\vec{F}$ est donné par : $W_{1\to 2} = \int_1^2 \delta w = \int_1^2 \vec{F}.\overrightarrow{dl}$

Supposons que M soit soumis à une somme de forces extérieures $\vec{F}_{rés} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$. En généralisant, on peut dire que le travail de $\vec{F}_{rés}$ entre M_1 et M_2 est donné par :

$$\boxed{W_{rés\,1\to 2} = \int_1^2 \delta w_{rés} = \int_1^2 \vec{F}_{rés}.\overrightarrow{dl}}$$

La puissance d'une force $\vec{F}$ est définie par :

$$\boxed{P = \frac{\delta w}{dt} = \vec{F}.\vec{v}(M)_R}$$

En généralisant, la puissance de $\vec{F}_{rés} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ est définie par : $P_{rés} = \vec{F}_{rés}.\vec{v}(M)_R$.

Force conservative : Si le travail d'une force $\vec{F}$ entre deux points M_1 et M_2 ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale et de la position finale alors cette force (notée $\vec{F}^C$) est conservative
Sur un contour fermé, le travail de $\vec{F}^C$ est nul.

Energie potentielle : Toute force conservative dérive d'une fonction énergie potentielle définie par :

$$\boxed{\delta w^C = \vec{F}^C.\overrightarrow{dl} = -dE_P}$$

Théorème de l'énergie cinétique (TEC) et de la puissance cinétique (TPC):

- entre t et $t + dt$:

$$\boxed{dE_C(M)_R = \delta w_{rés}}$$

- entre deux instants t_1 et t_2 :

$$\boxed{\Delta E_{C_{1\to 2}} = E_C(M_2) - E_C(M_1) = W_{rés\,1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}_{rés}.\overrightarrow{dl}}$$

- TPC :

$$\left(\frac{dE_C(M)_R}{dt}\right)_R = P_{rés} = \vec{F}_{rés}.\vec{v}(M)_R$$

Energie mécanique d'un point matériel : $E_m(M)_R = E_C(M)_R + E_{P\,tot}$

Théorème de l'énergie mécanique :

$$dE_m(M)_R = \delta w^{NC}$$

avec δw^{NC} travail élémentaire des forces non-conservatives entre t et $t + dt$.

Théorème de la puissance mécanique :

$$\left(\frac{dE_m(M)_R}{dt}\right)_R = \frac{\delta w^{NC}}{dt} = P^{NC}$$

avec $P^{NC} = \vec{F}^{NC}.\vec{v}(M)_R$ puissance des forces non-conservatives.

Intégrale première de l'énergie cinétique : si M n'est soumis qu'à l'action de forces conservatives (pas de forces non-conservatives ou travail des forces non-conservatives nul), l'énergie mécanique de M dans R est constante :

$$E_m(M)_R = E_C(M)_R + E_{P\,tot} = cte$$

Positions d'équilibres et stabilités : Soit M un point matériel à un degré de liberté (noté x) soumis uniquement à l'action de forces conservatives $\vec{F}^C$ dérivants d'une fonction énergie potentielle totale $E_{P\,tot}(x)$. Supposons que l'on connaisse l'allure de $E_{P\,tot}(x)$.

Soit $x_{éq}$ une position d'équilibre de M dans R. Nous retiendrons que :

- $E_{P\,tot}(x_{éq})$ est un extrémum (minimum ou maximum) de $E_{P\,tot}(x)$:

$$\left(\frac{dE_{P\,tot}(x)}{dx}\right)_{x_{éq}} = 0$$

- Si $\left(\frac{d^2E_{P\,tot}(x)}{dx^2}\right)_{x_{éq}} > 0$: $E_{P\,tot}(x_{éq})$ convexe au voisinage de $x_{éq}$ qui est une position **d'équilibre stable.**

- Si $\left(\frac{d^2E_{P\,tot}(x)}{dx^2}\right)_{x_{éq}} < 0$ alors $x_{éq}$ est une position **d'équilibre instable.**

Au voisinage d'une position d'équilibre stable, le système est assimilable à un oscillateur harmonique :

$$\ddot{x} + \omega^2 . x = 0$$

avec est $\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{d^2 E_{P\,tot}(x)}{dx^2}\right)_{x_{éq}}}$

Approche qualitative de la nature de la trajectoire, avec $E_m(M)_R = A = cte$:

$$E_C(M)_R = A - E_{P\,tot}(x) \geq 0$$

A l'aide de cette relation, par une méthode graphique, on peut dire si le système est dans un état lié ou dans un état libre (ou diffusion) en fonction des conditions initiales.