

Problème 1 Déplacements sur la Lune

A Caractéristiques du sol lunaire

A.1 En identifiant la force d'interaction gravitationnelle à la surface de l'astre au poids sur l'astre, on a $g_L = \frac{Gm_L}{R_L^2}$ et $g_T = \frac{Gm_T}{R_T^2}$ donc

$$g_L = g_T \frac{m_L}{m_T} \frac{R_T^2}{R_L^2}$$

A.2 A la surface de la Terre, $E_{saut} = mg_T h$ avec $h = 1$ m. Comme l'énergie du saut sur la Lune est la même, on a $E_{saut} = mg_L h_L$ donc

$$h_L = h \frac{g_T}{g_L}$$

On trouve $\frac{g_T}{g_L} = 6,1$ et $h_L = 6,1$ m : la détente est multipliée par 6 sur la Lune.

A.3 On a $x_M = vt$ donc $z_M = A \cos(\frac{2\pi}{\lambda} vt) = A \cos(\omega t)$ avec $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$.

A.4 Le PFD appliqué au véhicule en projection sur l'axe Oz donne $m\ddot{z}_M = -mg_L + R$ où R est la réaction du sol. Le véhicule est en contact avec le sol si $R > 0 \Leftrightarrow g_L + \ddot{z}_M > 0$.

De plus, $z_M = A \cos \omega t$ donc $\ddot{z}_M = -\omega^2 A \cos \omega t$.

Le véhicule reste donc en contact avec le sol si $\forall t, g_L - \omega^2 A \cos \omega t > 0$ donc si $g_L > \omega^2 A$. On trouve

$$A_{max} = \frac{g_L}{\omega^2} = \frac{g_L \lambda^2}{4\pi^2 v^2}$$

A.5 On trouve $A_{max} = 2,7$ mm pour $v = 14$ km h⁻¹ et $\lambda = 1,0$ m : le véhicule va donc décoller !

B Rover lunaire

B.1 Au repos, Le système est soumis dans le référentiel de la Lune supposé galiléen à la force de pesanteur lunaire et à la tension du ressort, soit à l'équilibre on a $-m_R g_L - k\Delta\ell = 0$ et $\Delta\ell = -\frac{m_R g_L}{k} < 0$, le ressort est comprimé.

B.2 En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse m_R dans le référentiel lunaire et en le projetant selon l'axe (Oz) , on a :

$$m_R \ddot{z} = -m_R g - k(\Delta\ell + z - z_O - l_0) - \beta \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_O}{dt} \right)$$

(Attention, z et z_O sont définis comme l'écart à la position d'équilibre donc $l = l_{eq} + z - z_O = l_0 + \Delta\ell + z - z_O$). On a donc

$$\ddot{z} + \frac{\beta}{m_R} \dot{z} + \frac{k}{m_R} z = \frac{k}{m_R} z_O + \frac{\beta}{m_R} \dot{z}_O$$

On a $\omega_1 = \frac{\beta}{m_R}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_R}}$ et $\boxed{f(t) = \omega_0^2 z_O + \omega_1 \dot{z}_O}$

B.3 En notation complexe, on a $\frac{dz}{dt} \leftrightarrow j\omega \underline{z}$ donc

$$\underline{H} = \frac{\underline{z}}{\underline{z}_O} = \frac{1 + j \frac{\omega \omega_1}{\omega_0^2}}{1 + j \frac{\omega \omega_1}{\omega_0^2} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

B.4 L'hypothèse k faible revient à dire que ω_0 est petit devant ω_1 : $\frac{\omega_0}{\omega_1} \ll 1$. La fonction de transfert se réécrit

$$\underline{H} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega \omega_1}{\omega_0^2}} \approx \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \text{ avec } 1 + j \frac{\omega \omega_1}{\omega_0^2} \approx j \frac{\omega \omega_1}{\omega_0^2}. \text{ On en déduit que la fonction de transfert est équivalente à}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}}$$

On reconnaît la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1 de pulsation de coupure $\omega_c = \omega_1 = \frac{\beta}{m_R}$

B.5 A partir des valeurs numériques, on a $\omega = 24$ rad s⁻¹. On veut $|z| \leq \frac{1}{10} |z_O|$ soit $|H| \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2}} \leq \frac{1}{10}$.

On doit donc avoir $(\frac{\omega}{\omega_c})^2 \geq 99$ soit $\omega_c \leq 2,5$ rad s⁻¹.

Comme $\omega_c = \frac{\beta}{m_R}$, on peut choisir $\beta = 1,7 \times 10^3$ kg s⁻¹.

B.6 On veut $\omega_0 \ll \omega_1$ donc $\omega_0 \approx 0,25$ rad s⁻¹. Comme $k = \omega_0^2 m_R$, on choisit $k \approx 45$ N m⁻¹.

B.7 Les pulsations de coupure ne sont pas affectées par le changement de gravité ; à l'inverse, l'amplitude des variations permettant au véhicule de rester en contact avec le sol augmente.

Problème 2 Pourquoi le ciel est-il bleu ?

1. Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à l'électron qui est assimilé à un point matériel dans le référentiel galiléen d'étude s'écrit : $\vec{T} + \vec{f} + \vec{F}_e = m\vec{a}$. La cinématique en coordonnées cartésiennes permet d'écrire : $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ et $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$

En projetant cette relation sur l'axe (Oy) (ou l'axe $\vec{u}_y$) on obtient : $-ky - h\dot{y} = m\ddot{y}$ soit $\ddot{y} + \frac{h}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0$

et $\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = 0$.

2. Les deux équations différentielles précédentes ont des solutions qui tendent vers 0 au bout de quelques $\tau = \frac{2m}{h}$. en régime permanent il n'y aura donc pas de mouvement suivant les axes (Oy) et (Oz) . En revanche, en projetant la deuxième loi de Newton suivant l'axe (Ox) on obtient : $-kx - h\dot{x} - eE_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$ soit $\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = -\frac{eE_0}{m} \cos \omega t$. Cette fois ci, en plus de la solution de l'équation homogène qui correspond au régime transitoire (et qui tend vers 0 au bout de quelques τ), on a une solution particulière sinusoïdale ce qui va entraîner un mouvement d'oscillations suivant l'axe (Ox) .

3. Par identification avec la forme donnée on a $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $Q = \frac{m\omega_0}{h} = \frac{\sqrt{km}}{h}$ et $F(t) = -\frac{eE_0}{m} \cos \omega t$. Les applications numériques donnent : $\omega_0 = 1,0 \times 10^{16} \text{ rad s}^{-1}$ et $Q = 9,8 \times 10^5$

4. Pour déterminer la solution particulière sinusoïdale, on passe en notation complexe $x = X e^{j\omega t}$ et $F(t) = F e^{j\omega t}$. L'équation différentielle devient alors : $(j\omega)^2 X + \frac{\omega_0}{Q} X + \omega_0^2 X = F$ soit $X = \frac{-\frac{eE_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q}}$. L'amplitude des oscillations s'obtient en prenant la valeur absolue de l'amplitude complexe X soit :

$$X = \frac{\frac{eE_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}$$

5. La relation entre la longueur d'onde λ , la vitesse de la lumière c et sa période T s'écrit : $\lambda = cT$. Sachant que $\omega = \frac{2\pi}{T}$, on a $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$. On obtient alors les valeurs numériques suivantes : $\omega_b = 4,7 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$ et $\omega_r = 2,4 \times 10^{15} \text{ radian/s}$

6. D'après les valeurs numériques calculées précédemment on a : $5,8 \times 10^{30} \text{ rad}^2 \text{ s}^{-2} \leq \omega^2 \leq 2,2 \times 10^{31} \text{ rad}^2 \text{ s}^{-2}$ et d'après la première question on a $\omega_0^2 = 1,1 \times 10^{32} \text{ rad}^2 \text{ s}^{-2}$. On peut donc conclure que $\omega^2 \ll \omega_0^2$ quelque soit la radiation du visible. De plus sachant que le facteur de qualité est très élevé, on a aussi $\omega_0^2 \gg \frac{\omega\omega_0}{Q}$. L'amplitude complexe se simplifie donc pour donner $X \approx -\frac{eE_0}{m\omega_0^2}$ d'où $X = |X| = \frac{eE_0}{m\omega_0^2}$ et $\varphi = \arg X = \pi$. Pour toute radiation située dans le domaine du visible, le déplacement de l'électron est donc donné par l'expression approchée : $x(t) = \frac{eE_0}{m\omega_0^2} \cos(\omega t + \pi) = -\frac{eE_0}{m\omega_0^2} \cos \omega t$. On constate que l'électron oscille en opposition de phase avec l'onde incidente, et avec une amplitude qui ne dépend pas de la longueur d'onde incidente.

7. L'accélération $\vec{a} = \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2}$ de l'électron s'écrit d'après l'expression précédente : $\vec{a} = \frac{eE_0\omega^2}{m\omega_0^2} \cos \omega t \vec{u}_x$.

Le carré de la norme de l'accélération s'écrit donc : $a^2 = \left(\frac{eE_0}{m}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$ et le rapport des puissances

diffusées dans le bleu et dans le rouge, d'après les indications de l'énoncé vaut dont $\frac{P_b}{P_r} = \frac{\left(\frac{eE_0}{m}\right)^2 \left(\frac{\omega_b}{\omega_0}\right)^4}{\left(\frac{eE_0}{m}\right)^2 \left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^4}$

soit $\frac{P_b}{P_r} = \left(\frac{\omega_b}{\omega_r}\right)^4 = \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_b}\right)^4$. L'application numérique donne $\frac{P_b}{P_r} = 2^4 = 16$. On constate que l'essentiel

de la puissance incidente reçue du Soleil dans le domaine du visible est diffusée dans les longueurs d'onde du bleu, ce qui explique la couleur bleu du ciel.

Problème 3 Étude d'une montre à quartz

A Modèles mécanique et électrique du résonateur à quartz

A.1 On applique le principe fondamental de la dynamique au cristal de quartz de masse m dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Les forces exercées sur le système sont la force de rappel $-kx\vec{u}_x$, la force de frottements $-h\frac{dx}{dt}\vec{u}_x$, la force piezoélectrique : $\beta V(t)\vec{u}_x$. En projetant la relation suivant $\vec{u}_x$ on obtient :

$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = \beta V(t)$. On obtient alors une équation différentielle linéaire du second ordre.

A.2 $C_P = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{e} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \pi d^2}{4e}$ soit $C_P = 8,0 \times 10^{-12} \text{ F}$ et $q_1(t) = C_P V(t)$.

A.3 On a $x = \frac{q_2}{\gamma}$ d'où : $m\ddot{q}_2 + h\dot{q}_2 + kq_2 = \gamma\beta V(t)$

A.4 L'équation différentielle vérifiée par q_2 dans ce circuit est de la forme : $L\ddot{q}_2 + R\dot{q}_2 + \frac{q_2}{C_S} = V(t)$ or $\frac{m}{\gamma\beta}\ddot{q}_2 + \frac{h}{\gamma\beta}\dot{q}_2 + \frac{k}{\gamma\beta}q_2 = V(t)$, on en déduit $L = \frac{m}{\gamma\beta}$, $R = \frac{h}{\gamma\beta}$ et $C_S = \frac{\gamma\beta}{k}$

B Étude de l'impédance équivalente du quartz

B.1 La bobine et la capacité C_S en série a pour admittance $\frac{jC_S\omega}{1-LC_S\omega^2}$, soit

$$\underline{Y}_{AB} = jC_P\omega + \frac{jC_S\omega}{1-LC_S\omega^2} = \frac{jC_S\omega + jC_P\omega(1-LC_S\omega^2)}{1-LC_S\omega^2} = j\omega(C_S + C_P) \frac{1 - \frac{LC_S C_P \omega^2}{C_S + C_P}}{1 - LC_S\omega^2}$$

On obtient alors comme impédance $\underline{Z}_{AB} = \frac{1}{\underline{Y}_{AB}} = (-\frac{j}{\alpha\omega}) \frac{1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_a^2}}{1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_a^2}}$ avec $\alpha = C_S + C_P$, $\omega_r^2 = \frac{1}{LC_S}$ et $\omega_a^2 = \frac{C_S + C_P}{LC_S C_P \omega^2}$ soit $\omega_a^2 = \omega_r^2(1 + \frac{C_S}{C_P})$. On vérifie bien que $\omega_a^2 > \omega_r^2$.

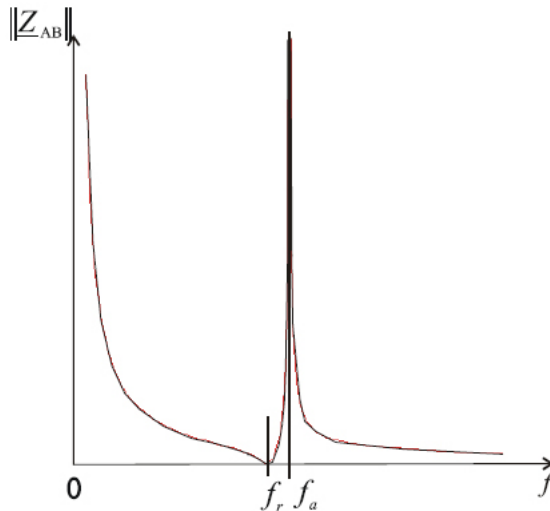
B.2 $f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C_S + C_P}{LC_S C_P}} = 800 \text{ kHz}$ et $f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC_S}} = 796 \text{ kHz}$. Les deux fréquences sont très proches (écart de l'ordre de 0,5%).

B.3 Pour déterminer le comportement inductif ($\text{Im}(\underline{Z}_{AB}) > 0$) ou capacitif ($\text{Im}(\underline{Z}_{AB}) < 0$) du quartz, on effectue le tableau de signe de $\underline{Z}_{AB}$:

ω	ω_r	ω_a	
$1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_a^2}$	+	-	-
$1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_a^2}$	+	+	-
$\text{Im}(\underline{Z}_{AB})$	-	+	-

Le quartz aura un comportement inductif lorsque $\omega_r < \omega < \omega_a$

B.4 À partir des limites en basses fréquences ($f \rightarrow 0$) et en hautes fréquences ($f \rightarrow \infty$) puis on remarquant que $|\underline{Z}_{AB}(f_r)| = 0$, et que la limite de $|\underline{Z}_{AB}|$ lorsque $f \rightarrow f_a$ est infinie, on peut tracer l'allure ci-dessous :



C Étude expérimentale de la résonance d'un quartz

C.1 La relation entre $\underline{V}_s$ et $\underline{V}_e$ est donnée par la formule du diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{R_v}{R_v + \underline{Z}_{AB}}$$

C.2 On a $\|H\| = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\|Z_{AB}\|}{R_v}\right)^2}}$ car l'impédance du quartz est imaginaire pure. On en déduit alors

$$\left(\frac{\|Z_{AB}\|}{R_v}\right)^2 = 3, \text{ soit } \boxed{\|\vec{Z}_{AB}\| = R_v\sqrt{3}}$$

C.3 $\boxed{Q = 15,9 \times 10^3}$ et $\boxed{R = \frac{L\omega_0}{Q} = 157 \Omega}$

D Principe d'un montre à quartz

D.1 Il s'agit ici d'une division de fréquence par 2. En sortie du compteur, on a donc un signal de fréquence 16 384 Hz.

D.2 $32768 = 2^{15}$. Il faut donc placer 15 compteurs modulo 2 en cascade pour pouvoir réduire la fréquence à 1,0000 Hz. On a ainsi réalisé un diviseur de fréquence par 32768.

Problème 4 Identifier un signal de sortie grâce à la fonction de transfert

- Posons $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = G \exp(j\varphi)$. Ainsi, G est le gain du filtre et φ l'avance de phase de la tension de sortie sur la tension d'entrée. Nous pouvons écrire :

$$S_m = \frac{3}{\sqrt{4 + 25\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} E_m \quad \text{et} \quad \tan(\varphi) = -\frac{5\omega}{2\omega_0} \quad \text{avec} \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi \leq 0.$$

Résumons dans un tableau :

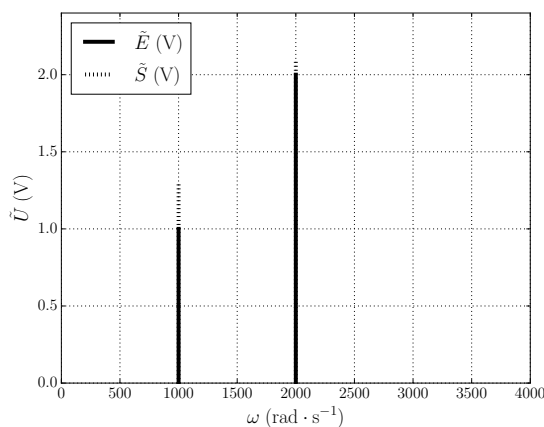
Pulsation en rad s^{-1}	$1,0 \times 10^2$	$1,0 \times 10^3$	$1,0 \times 10^4$
S_m en V	1,5	1,3	0,29
φ en $^\circ$	-2,9	-27	-79

S_m est faible en haute fréquence et augmente lorsque ω diminue. En basse fréquence, la phase tend vers 0 alors qu'elle tend vers -90° en haute fréquence.

- Ce filtre est transparent pour les basses fréquences et atténue les hautes fréquences ; il s'agit d'un filtre passe-bas dont la fonction de transfert peut être mise sous la forme canonique proposée avec $f_c = \frac{\omega_0}{5\pi} = 3,2 \times 10^2 \text{ Hz}$ et $H_0 = \frac{3}{2} = 1,5$.
- On utilise la linéarité du filtre : le signal de sortie d'un signal d'entrée composé de deux fréquences est la somme de la sortie de ces deux composantes fréquentielles.

Notons $G(\omega)$ le gain du filtre pour la pulsation ω et $\varphi(\omega)$ l'argument de la fonction de transfert.

$$s(t) = E_m G(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) + 2E_m G(2\omega) \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{4} + \varphi(2\omega)\right).$$



Avec $\omega = 1,0 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}$, $G(\omega)E_m = 1,3 \text{ V}$, $2G(2\omega)E_m = 2,1 \text{ V}$, $\varphi(\omega) = -27^\circ$, $\varphi(2\omega) = -45^\circ$. Nous en déduisons les spectres fréquentiels ci-contre.

La composante de pulsation $1,0 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}$ est dans la bande passante : son amplitude est multipliée par H_0 .

L'autre composante est aussi dans la bande passante à -3 dB mais le gain est déjà atténué.