

Isolation thermique et acoustique

I. Double vitrage et isolation acoustique

- 1) Domaine des ondes sonores audible par l'homme : $20 \text{ Hz} < f < 20 \text{ kHz}$.
- 2) Le minimum d'atténuation (ce qui correspond à un maximum de transmission) observé au voisinage de 3000 Hz est probablement dû à un phénomène de résonance (sur une vitre d'épaisseur $e = 4 \text{ mm}$).
- 3) La force exercée par le ressort sur la masse 2 est donnée par la loi de Hooke :

$$\vec{F} = -k \cdot (l(t) - l_0) \cdot \vec{e}_x$$

avec $l(t) = x_2(t) - x_1(t)$:

$$\vec{F} = -k \cdot (x_2(t) - x_1(t) - l_0) \cdot \vec{e}_x$$

- 4) On assimile la masse m_2 à un point matériel observé dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Bilan des forces : le poids et la réaction du support (qui se compensent), la force $\vec{f}$ exercée par l'amortisseur et la force $\vec{F}$ exercée par le ressort. Appliquons le principe fondamental de la dynamique : $m_2 \cdot \vec{a} = \vec{f} + \vec{F}$. En explicitant, puis en projetant sur $\vec{e}_x$:

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 = -\alpha \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k \cdot (x_2(t) - x_1(t) - l_0)$$

- 5) On pose : $u_2(t) = x_2(t) - l_0$; on en déduit que $\dot{u}_2 = \dot{x}_2$ et $\ddot{u}_2 = \ddot{x}_2$. On établit que :

$$m_2 \cdot \ddot{u}_2 = -\alpha \cdot (\dot{u}_2 - \dot{x}_1) - k \cdot (u_2 - x_1)$$

En divisant par m_2 :

$$\ddot{u}_2 + \frac{\alpha}{m_2} \dot{u}_2 + \frac{k}{m_2} u_2 = \frac{\alpha}{m_2} \dot{x}_1 + \frac{k}{m_2} x_1$$

Posons :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{m_2 \cdot \omega_0}{\alpha}$$

On vérifie que :

$$\ddot{u}_2 + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_2 + \omega_0^2 \cdot u_2 = \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}_1 + \omega_0^2 \cdot x_1$$

- 6) En adoptant les notations complexes, l'équation différentielle précédente devient :

$$\ddot{\underline{u}}_2(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\underline{u}}_2(t) + \omega_0^2 \cdot \underline{u}_2(t) = \frac{\omega_0}{Q} \dot{\underline{x}}_1(t) + \omega_0^2 \cdot \underline{x}_1(t)$$

En explicitant les dérivées :

$$-\omega^2 \cdot \underline{u}_2(t) + \frac{j \cdot \omega \cdot \omega_0}{Q} \cdot \underline{u}_2(t) + \omega_0^2 \cdot \underline{u}_2(t) = \frac{j \cdot \omega \cdot \omega_0}{Q} \cdot \underline{x}_1(t) + \omega_0^2 \cdot \underline{x}_1(t)$$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j \cdot \omega \cdot \omega_0}{Q} \right) \cdot \underline{u}_2(t) = \left(\omega_0^2 + \frac{j \cdot \omega \cdot \omega_0}{Q} \right) \cdot \underline{x}_1(t)$$

On établit l'expression de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j.\omega) = \frac{\omega_0^2 + \frac{j.\omega.\omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j.\omega.\omega_0}{Q}}$$

7) Module de la fonction de transfert :

$$G = |\underline{H}| = \frac{\sqrt{(\omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega.\omega_0}{Q}\right)^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega.\omega_0}{Q}\right)^2}}$$

8) On observe un phénomène de **résonance** (d'élongation).

9) La fonction $G(x)$ admet un maximum quand la fonction $D(x)$ est minimale. Pour identifier ce minimum, dérivons cette fonction :

$$\frac{dD(x)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{D(x)} \left(-4.x + 4.x^3 + \frac{2.x}{Q^2} \right)$$

$$\frac{dD(x)}{dx} = 0 \quad \text{pour} \quad 4.x \cdot \left(-1 + x^2 + \frac{1}{2.Q^2} \right) = 0$$

Quel que soit le facteur de qualité, on observe une tangente horizontale en $x = 0$ (ceci est vérifié sur la courbe fournie) et la fonction $G(x)$ admet un maximum si et seulement $Q > 1/\sqrt{2}$ pour :

$$x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2.Q^2}}$$

10) On peut noter que pour les grandes valeurs de Q : $x_r = 1$. Dans ce cas, le maximum est effectivement observé pour $\omega_r = \omega_0$.

11) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à chacune des masses dans le référentiel terrestre supposé galiléen, puis en projetant sur $\vec{e}_x$ on établit que :

- Pour la masse m_1 : $m_1.\ddot{x}_1 = k.(l(t) - l_0)$ (1)
- Pour la masse m_2 : $m_2.\ddot{x}_2 = -k.(l(t) - l_0)$ (2)

12) Avec $l(t) = x_2 - x_1$ et $\ddot{l} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$; en faisant (2) - (1) on établit que :

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -k.\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right).(l(t) - l_0) = \ddot{l}$$

Soit l'équation différentielle vérifiée par $l(t)$:

$$\ddot{l} + k.\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right).l = k.\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right).l_0$$

13) On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique du type :

$$\ddot{l} + \omega_0^2.l = \omega_0^2.l_0$$

avec ω_0 pulsation propre donnée par :

$$\omega_0 = \sqrt{k.\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)}$$

14) La solution de cette équation différentielle est du type :

$$l(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + l_0$$

où A et B sont des constantes définies par des conditions initiales :

$$\begin{cases} l(0) = l_0 - \delta \\ \dot{l}(0) = 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$l(t) = -\delta \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + l_0$$

15) Pour abaisser la fréquence du pic de résonance, il faut **augmenter les masses** des vitres...

16) Le double vitrage asymétrique limite la résonance, les creux d'atténuation sont donc plus faibles.

II. Comportement thermique d'une habitation

23) Pulsation de la variation thermique : $\omega = 2 \cdot \pi / T = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

24) On note $\underline{Z}_{\text{eq}}$ l'impédance équivalente à l'ensemble C_2, R_1 et C_1 :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = j \cdot C_2 \cdot \omega + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{j \cdot C_1 \cdot \omega}}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = j \cdot C_2 \cdot \omega + \frac{j \cdot C_1 \cdot \omega}{1 + j \cdot R_1 \cdot C_1 \cdot \omega} = \frac{j \cdot C_2 \cdot \omega \cdot (1 + j \cdot R_1 \cdot C_1 \cdot \omega) + j \cdot C_1 \cdot \omega}{1 + j \cdot R_1 \cdot C_1 \cdot \omega}$$

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{1 + j \cdot R_1 \cdot C_1 \cdot \omega}{j \cdot C_1 \cdot \omega + j \cdot C_2 \cdot \omega - R_1 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \omega^2}$$

25) Avec :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$$

Si $|\underline{Z}_1| \gg |\underline{Z}_2|$ alors $1/|\underline{Z}_1| \ll 1/|\underline{Z}_2|$ et on peut faire l'hypothèse que $\underline{Z}_{\text{eq}} = \underline{Z}_2$.

26) En utilisant la relation du diviseur de tension, on établit que :

$$\underline{u}_2 = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}} \cdot \underline{e}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R_2}$$

En faisant l'hypothèse que $\underline{Z}_{\text{eq}} = \underline{Z}_2$:

$$\underline{u}_2 = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{e}}{\underline{Z}_2 + R_2}$$

En explicitant :

$$\underline{u}_2 = \frac{\underline{e}}{1 + j \cdot R_2 \cdot C_2 \cdot \omega}$$

Connaissant $\underline{u}_2$, la tension $\underline{u}_1$ est donnée par la relation du diviseur de tension. De la même manière, on établit que :

$$\underline{u}_1 = \frac{\underline{u}_2}{1 + j \cdot R_1 \cdot C_1 \cdot \omega}$$

En explicitant $\underline{u}_2$:

$$\underline{u}_1 = \frac{\underline{e}}{(1 + j \cdot R_1 \cdot C_1 \cdot \omega)(1 + j \cdot R_2 \cdot C_2 \cdot \omega)}$$

On établit ainsi que :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}_1}{\underline{e}} = \frac{1}{(1 + j \cdot R_1 \cdot C_1 \cdot \omega)(1 + j \cdot R_2 \cdot C_2 \cdot \omega)}$$

Si on pose que :

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1 \cdot C_1} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{R_2 \cdot C_2}$$

On vérifie que :

$$\underline{H} = \frac{1}{\left(1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

27) Le gain a pour expression :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right)}}$$

Gain en décibels :

$$G_{dB} = 20 \cdot \log G(\omega) = -20 \cdot \log \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right)}$$

28) A basse fréquence : $G_{dB} = 0$, asymptote horizontale. A haute fréquence : $G_{dB} = -40 \cdot \log \omega + 20 \cdot \log(\omega_1 \cdot \omega_2)$, pente de -40 dB/déc.

29) Posons $\underline{H} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$. Si on note $\varphi(\omega)$ le déphasage de $\underline{u}_1$ par rapport à $\underline{e}$ alors :

$$\varphi(\omega) = \arg \underline{H} = \arg \underline{H}_1 + \arg \underline{H}_2 = -\arg \left(1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_1}\right) - \arg \left(1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_2}\right)$$

A basse fréquence : $\varphi(\omega) = 0$. A haute fréquence : $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$

30) Cas d'une isolation par l'intérieur : $\omega_1 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_2 = +\infty$ donc le gain en décibel se ramène à :

$$G_{dB} = 20 \cdot \log G(\omega) = -20 \cdot \log \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)}$$

Pour $\omega = \omega_1 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$: $G_{dB} = -3,0 \text{ dB}$, l'isolation par l'intérieur est la courbe **en trait continu**.

Pour l'isolation par l'extérieur, on établit une expression similaire et on vérifie que l'isolation par l'extérieur correspond bien à la courbe en pointillés.

31) Sachant que $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, pour une isolation par l'intérieur (diag. de Bode en trait continu) le gain en décibel est environ $G_{dB} = -30 \text{ dB}$ (lecture délicate !). On en déduit que :

$$|\underline{H}| = \frac{U_{10}}{E_0} = 10^{-\frac{30}{20}} = 0,032$$

Soit :

$$U_{10} = 0,32 \text{ V}$$

32) Pour une isolation par l'extérieur (diag. de Bode en pointillés), de la même manière on établit que $G_{dB} = -50 \text{ dB}$ donc :

$$|\underline{H}| = \frac{U_{10}}{E_0} = 10^{-\frac{50}{20}} = 0,0032$$

$$U_{10} = 0,032 \text{ V}$$

On peut noter qu'une isolation par l'extérieur est beaucoup plus efficace qu'une isolation par l'intérieur (ce qui était prévisible...).

33) Dans les deux cas, $u_1(t)$ est en quadrature retard par rapport à $e(t)$, ce qui correspond à un quart de période et une durée ou une durée de 6 heures.