

**T.D. n°1****Thermodynamique**

Thème : Théorie cinétique des gaz

**A.1 : Existence d'une atmosphère à la surface des planètes**

1) Calculer numériquement la vitesse de libération et la vitesse quadratique moyenne pour le dihydrogène et pour le diazote à la surface des quatre planètes telluriques (Mercure, Vénus, Terre, Mars) pour une température de 300 K. Conclure quant à la présence possible d'une atmosphère à cette température. On donne :

Planète	Diamètre équatorial en km	Rapport de la masse à celle de la Terre
Mercure	4878	0,055
Vénus	12104	0,815
Terre	12756	1
Mars	6794	0,107

Masse de la Terre :  $M_T = 5,976 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ;  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ; masse des molécules :  $m_{\text{H}_2} = 3,30 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  et  $m_{\text{N}_2} = 4,65 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ ; constante de Boltzmann :  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

2) Quel devrait être l'ordre de grandeur de la température pour que les molécules de diazote échappent à l'attraction terrestre ?

Donnée : vitesse de libération à la surface d'une planète de masse  $M_P$  et de rayon  $R_P$  :  $v_l = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_P}{R_P}}$

**A.2: Gaz et énergie interne**

1) Estimer l'énergie interne contenue dans 1 L d'air dans les conditions usuelles de température et de pression.

2) Avec toute cette énergie, de quelle altitude pourrait-on faire monter une masse de 1,0 kg ? On prendra  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

**A.3 : Fonte de la glace**

Des glaçons flottent à la surface de l'eau dans un verre. Que peut-on conclure quant à la masse volumique de l'eau solide et de l'eau liquide ? Lorsque les glaçons ont fondus, le niveau de l'eau dans le verre est-il monté, descendu ou resté inchangé ? Justifier votre réponse.

**B.1: Libre parcours moyen**

Les molécules constituant l'air sont modélisées par des sphères dures de diamètre  $d$  réparties avec une densité volumique  $n^*$ . On s'intéresse à une molécule donnée, toutes les autres étant supposées immobiles. La molécule considérée possède une vitesse de norme constante, égale à la vitesse quadratique moyenne  $v^*$ .

1) Quelle distance entre le centre de la molécule considérée et le centre d'une autre doit être atteinte pour qu'il y ait collision ?

2) On définit le volume utile balayé par la molécule considérée de la manière suivante : une molécule dont le centre est situé dans ce volume utile sera percutée par la molécule considérée au cours de son mouvement. Estimer le volume utile  $V_u$  ainsi balayé au cours de la durée  $\Delta t$  du mouvement d'une molécule.

3) En déduire le nombre de collisions subies par la molécule pendant une durée  $\Delta t$ .

4) Exprimer alors le libre parcours moyen  $\bar{l}$  de la molécule.

5) Donner un ordre de grandeur du libre parcours moyen dans l'air à pression et température usuelles. On donne  $d = 300 \text{ pm}$  et la constante de Boltzmann :  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ . Commenter le résultat.

**B.2: Evaporation de l'eau**

Dans une pièce hermétiquement fermée, de volume  $V = 40 \text{ m}^3$ , on place un récipient contenant un volume  $V_0 = 200 \text{ mL}$  d'eau liquide. L'air de la pièce est à la pression  $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  et à la température  $T_0 = 20^\circ \text{C} = 293 \text{ K}$ . Son degré d'hygrométrie est  $\tau = 60 \%$ . Le taux hygrométrique est le rapport de la pression partielle de l'eau divisée par la pression de vapeur saturante de l'eau, valant dans ces conditions  $\pi_S(20^\circ \text{C}) = 2,3 \text{ kPa}$ . On assimile l'eau à un gaz parfait de masse molaire  $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

- 1) Calculer la quantité d'eau initialement contenue dans l'atmosphère de la pièce.
- 2) Montrer que toute l'eau contenue dans le verre s'évapore. Quel est le degré d'hygrométrie final de l'air de la pièce ?
- 3) Quel volume d'eau liquide faut-il évaporer pour saturer la pièce en eau ?

**B.3: Degré hygrométrique de l'air humide**

On considère un volume  $V$  d'air humide à la température  $T$  sous la pression atmosphérique  $P$  approximée à la pression standard  $P^\circ = 1,0 \text{ bar}$ . Le degré hygrométrique de l'air, exprimé en pourcentage, est défini par  $e = \frac{P_e(T)}{P_S(T)}$  où  $P_e(T)$  est la pression partielle de la vapeur d'eau et  $P_S(T)$  la pression de vapeur saturante, à la température  $T$ .

- 1) Montrer que le degré hygrométrique peut s'écrire  $e = \frac{m_e}{m_s}$  où  $m_e$  est la masse de vapeur d'eau contenue dans le volume  $V$  d'air humide et  $m_s$  la masse de vapeur d'eau dont la pression partielle est la pression de vapeur saturante dans le même volume  $V$ .
- 2) Donner le degré hygrométrique pour de l'air sec et pour de l'air saturé en vapeur d'eau.
- 3) On appelle humidité absolue d'un air humide, le rapport  $x = \frac{m_e}{m_a}$  où  $m_a$  est la masse d'air sec contenue dans le volume  $V$  d'air humide. Montrer que ce quotient peut se mettre sous la forme :  $x = \delta \cdot \left( \frac{P_e(T)}{P - P_e(T)} \right)$  où  $\delta = \frac{M_e}{M_a} = 0,62$  est la densité de la vapeur d'eau par rapport à l'air sec.
- 4) Dans un atelier de volume  $V = 300 \text{ m}^3$ , le degré hygrométrique est  $e = 40 \%$ . La température est de  $27^\circ \text{C}$  (soit  $T = 300 \text{ K}$ ) et la pression totale est de  $P = P^\circ = 1,0 \text{ bar}$ . On donne  $P_S(27^\circ \text{C}) = 3969 \text{ Pa}$ .
  - 4-a: Calculer  $x$ .
  - 4-b: En déduire les masses  $m_a$  et  $m_e$  ainsi que la masse totale d'air humide  $m_h$ .
- 5) Durant la nuit, le local n'est pas chauffé et sa température chute, de façon isochore, à  $5^\circ \text{C}$  soit  $T' = 278 \text{ K}$ .
  - 5-a: Préciser la nouvelle pression partielle de la vapeur d'eau  $P_e'$  en supposant que  $P_e'$  reste inférieure à  $P_S(T')$ .
  - 5-b: On donne  $P_S(5^\circ \text{C}) = 10 \text{ mbar}$ . Montrer que l'air est alors saturé en vapeur d'eau. En déduire le nouveau degré hygrométrique  $e'$  de l'atmosphère du local ainsi que la masse d'eau liquéfiée.

**B.4: Effusion d'un gaz dans le vide**

Une cabine de navette spatiale de volume  $V = 1 \text{ m}^3$  contient  $N_0$  molécules d'air maintenues à la température  $T$ . A l'instant  $t = 0$ , une météorite perce dans la paroi un petit trou de section  $s = 1 \mu\text{m}^2$  par lequel le gaz peut s'échapper dans le vide. On supposera que le trou est suffisamment petit pour que la répartition des vitesses des particules de l'enceinte ne soit pas perturbée. On note  $N$  le nombre de molécules présentes à l'intérieur de l'enceinte à l'instant  $t$ . On prendra un modèle dans lequel les molécules se déplacent dans les six directions, avec des vitesses de même norme égale à la vitesse quadratique moyenne  $v^*$ .

- 1) Montrer qu'à l'instant  $t$ , le nombre de molécules sortant de l'enceinte pendant  $dt$  s'écrit :

$$dN = \frac{N \cdot s}{6 \cdot V} v^* \cdot dt$$

2) En déduire l'expression du nombre de molécules dans l'enceinte  $N$  à l'instant  $t$ .

3) Donner l'expression de l'instant  $t_0$  au bout duquel la pression dans l'enceinte a diminué de moitié.

### B.5: Effusion d'un gaz dans un compartiment

On considère deux compartiments de volume  $V_1$  et  $V_2$ , l'ensemble est maintenu à la température  $T$ . Entre les deux compartiments, un petit trou de section  $s$  a été pratiqué. Initialement on a  $N_a$  particules d'un gaz parfait dans  $V_1$  et un vide parfait dans le volume  $V_2$ . On note  $N_1(t)$  et  $N_2(t)$  les nombres de particules dans les volumes  $V_1$  et  $V_2$  à l'instant  $t$  et on adopte le modèle suivant : les particules ont toutes le même module de vitesse  $v^*$  et leur vitesse est suivant des directions  $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, -\vec{u}_x, -\vec{u}_y, -\vec{u}_z$ .

1) Quel est le nombre  $dN_{1 \rightarrow 2}$  de particules qui passent de  $V_1$  à  $V_2$  entre  $t$  et  $t + dt$  ?

2) On suppose que  $V = V_1 = V_2$ . Etablir l'équation différentielle vérifiée par  $N_1(t)$ .

3) Définir un temps caractéristique  $\tau$ .

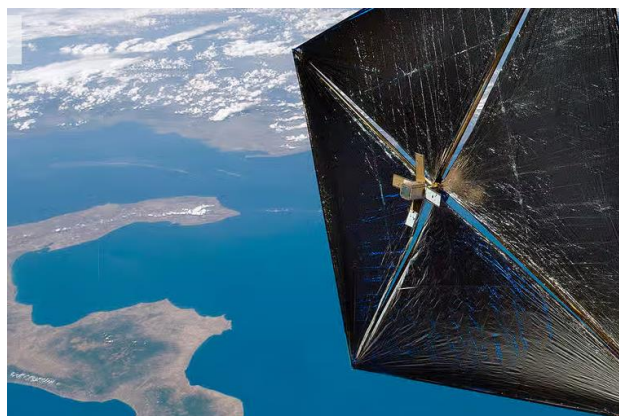
4) En déduire les expressions de  $N_1(t)$  et  $N_2(t)$ .

5) Comment varie-t-il en fonction de la masse molaire du gaz si on admet que  $v^* = \sqrt{\frac{3.R.T}{M}}$  ?

6) Quelle peut-être l'application pratique de ce phénomène d'effusion gazeuse ?

### B.6 : Voile solaire

Une feuille de tissu réfléchissant solidaire d'un vaisseau spatial va dévier les photons du soleil, d'où un transfert de quantité de mouvement. L'orientation de cette « voile » permet de dévier la trajectoire des photons. On rappelle que la quantité de mouvement d'un photon de fréquence  $\nu$  est  $h \cdot \nu / c$  où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide, et que son énergie est  $h \cdot \nu$ . On considérera un faisceau de lumière parallèle se propageant dans le vide ; on notera  $n$  le nombre de photons par unité de volume. Les chocs entre les photons et la voile sont supposés élastique (c'est-à-dire que la norme de la quantité



de mouvement est conservée lors du choc élastique d'un projectile sur une paroi infiniment lourde et que sa direction est changée en son symétrique par rapport à la paroi).

1) On considère un photon arrivant perpendiculairement à la voile, exprimer en fonction de  $h, c, \nu$  et d'un vecteur unitaire que l'on précisera, la variation de quantité de mouvement du photon au cours d'un choc.

2) Exprimer la puissance lumineuse (c.à.d. l'énergie par unité de temps, également appelée « flux d'énergie lumineuse »)  $\phi_e$  reçue par une surface  $S$  perpendiculaire aux rayons lumineux, en fonction de  $n, h, \nu, c$  et  $S$ .

3) En déduire la force  $\vec{T}_0$  exercée par les photons sur cette surface  $S$  en fonction de  $n, h, \nu, c, S$  et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

4) Application numérique : la densité surfacique de puissance lumineuse solaire est de  $1,0 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$  au voisinage de l'orbite terrestre. La vitesse de la lumière dans le vide est prise égale à  $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . En déduire l'ordre de grandeur de la force  $T_0$  qu'on peut obtenir pour une surface  $S = 1,0 \text{ m}^2$ . Commenter.

5) Supposons que la voile ne soit plus perpendiculaire au faisceau lumineux. Soit  $\theta$  l'angle entre le faisceau et la normale à la voile. Exprimer en fonction de  $h, c, \nu, \theta$  et d'un vecteur unitaire à préciser, la variation de quantité de mouvement  $\Delta \vec{p}$  d'un photon au cours d'un choc avec la voile. Exprimer la force de poussée exercée sur la même surface  $S$  en fonction de  $n, h, \nu, \theta, S$  et d'un vecteur unitaire à préciser. Exprimer la force de poussée  $T$  en fonction de  $\theta$  et de la force de poussée  $T_0$  pour  $\theta = 0$ .

6) Ce type de propulseur permet-il de se rapprocher du Soleil ? Donner un avantage et un inconvénient de ce type de propulseur.

### B.7 : Pression de radiation et lévitation optique...

On considère une onde plane progressive monochromatique de fréquence  $\nu$  se propageant à la célérité  $c$  dans le vide dans la direction de l'axe  $Ox$ . Cette onde est modélisée par un champ électrique  $\vec{E} = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) \cdot \vec{u}_y$ . On montre que la densité volumique d'énergie associée à cette onde est  $e_{vol} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E_0^2$  où  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} F \cdot m^{-1}$  est la permittivité du vide.

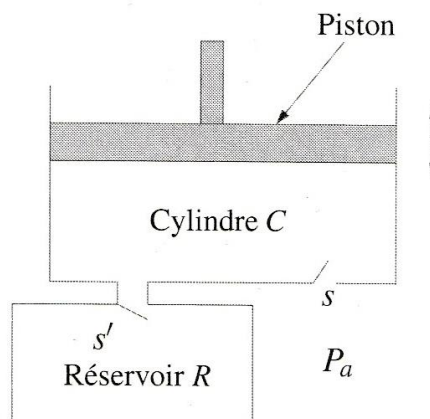
On donne la célérité de la lumière dans le vide :  $c = 3,0 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}$  et on rappelle que l'unité du champ électrique  $E$  est le  $V/m$ .

- 1) Vérifier que  $e_{vol}$  est effectivement homogène à une énergie volumique.
- 2) Déterminer la quantité  $dE$  d'énergie qui traverse une surface  $S$  perpendiculaire à l'axe  $Ox$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ .
- 3) L'énergie d'un photon associé à cette onde est  $h \cdot \nu$  (où  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} J \cdot s$  est la constante de Planck). Exprimer le nombre  $dN_0$  de photons qui traverse la surface  $S$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , en fonction de  $\epsilon_0, c, S, E_0, h, \nu$  et  $dt$ .
- 4) L'onde arrive sur une surface plane parfaitement réfléchissante. On étudie le rebondissement des photons sur cette surface. Sachant que la quantité de mouvement d'un photon incident est  $\frac{h \cdot \nu}{c} \vec{u}_x$  quelle est la quantité de mouvement reçue par la paroi au cours d'un choc photon-paroi ?
- 5) En déduire la force exercée par le faisceau lumineux sur la paroi ? Montrer que la pression  $p$  exercée par l'onde lumineuse a pour expression  $p = \epsilon_0 \cdot E_0^2$ . Que devient cette expression si la paroi est parfaitement absorbante ?
- 6) On considère un faisceau lumineux de puissance  $P$ . Quelle relation existe-t-il entre  $P$  et  $dE$  ?
- 7) La puissance du faisceau lumineux est  $P = 100 W$  (laser utilisé industriellement pour la découpe de feuilles). Calculer l'intensité du champ électrique  $E_0$  ainsi que la pression  $p$  exercé par ce faisceau lumineux de diamètre  $d = 5,0 mm$  sur une paroi parfaitement absorbante.
- 8) On considère un cylindre de masse volumique  $\mu$ , de rayon  $a$  et de hauteur  $h = a$  plongé dans le champ de pesanteur d'intensité  $g = 9,8 m \cdot s^{-2}$ . Le faisceau laser précédent éclaire la base du cylindre perpendiculairement (on supposera que  $a < d$ ). Montrer que si  $a$  est inférieure à une certaine valeur  $a_0$  dont on donnera l'expression, le cylindre peut-être soulevé par le faisceau (phénomène de lévitation optique).
- 9) Application numérique : calculer  $a_0$  pour  $\mu = 1,0 \cdot 10^3 kg \cdot m^{-3}$ .

### C.1 : Etude d'un compresseur

Un compresseur est constitué de la façon suivante : un piston se déplace dans un cylindre  $C$  qui communique par des soupapes  $s$  et  $s'$  respectivement avec l'atmosphère (pression  $P_a$ ) et avec un réservoir  $R$  contenant l'air comprimé. Le réservoir  $R$  contient initialement de l'air considéré comme un gaz parfait à la pression  $P_0 \geq P_a$ . Le volume du réservoir  $R$ , canalisations comprises, est  $V$ . Le volume offert au gaz dans  $C$  varie entre un volume maximum  $V_M$  et un volume minimum  $V_m$ , volume nuisible résultant de la nécessité d'allouer un certain espace à la soupape  $s$ .

- La soupape  $s$  s'ouvre lorsque la pression atmosphérique  $P_a$  devient supérieure à la pression dans le cylindre  $C$  et se ferme pendant la descente du piston.
- La soupape  $s'$  s'ouvre lorsque la pression dans le réservoir devient inférieure à celle du gaz dans le cylindre  $C$  et se ferme pendant la montée du piston.



Au départ, le piston est dans sa position la plus haute ( $V = V_M$ ),  $s'$  est fermée,  $s$  est ouverte et le volume  $V_m$  est rempli d'air à la pression  $P_a$ .

- 1) En supposant que le piston se déplace assez lentement pour que l'air reste à température constante, calculer le volume  $V_1'$  pour lequel  $s'$  s'ouvre, en fonction de  $P_0$ ,  $P_a$  et  $V_M$ .
- 2) Calculer la pression  $P_1$  dans le réservoir  $R$  après le premier aller et retour.
- 3) En écrivant une condition sur  $V_1'$ , calculer la valeur  $P_{max}$  au-dessus de laquelle la pression ne peut pas monter dans le réservoir.
- 4) Calculer la pression  $P_n$  dans le réservoir  $R$  après  $n$  allers et retours du piston. On rappelle que :

$$\sum_{i=1}^n q^i = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

- 5) Donner la valeur de  $P_n$  quand  $n \gg 1$ . Comparer cette limite avec  $P_{max}$ .
- 6) Calculer  $P_1$  et  $P_{max}$  avec  $V = 5,0 L$ ,  $V_M = 0,25 L$ ,  $V_m = 10 cm^3$ ,  $P_0 = P_a = 1,0 bar$

**Solutions: A.1:** 1) Vitesse de libération :  $v_l = \sqrt{\frac{2.G.M_p}{R_p}}$  avec  $M_p$  et  $R_p$  : masse et rayon de la planète.

Planète	Mercure	Vénus	Terre	Mars
$v_l$ en $km.s$	4,24	10,4	11,2	5,01

A.N. Vitesse quadratique moyenne :  $v^* = \sqrt{\frac{3.k_B.T}{m}}$  avec  $m$  masse d'une molécule. A.N.:  $v^*(H_2) = 1,94 km.s^{-1}$  et  $v^*(N_2) = 517 m.s^{-1}$ . On constate que pour toutes les planètes,  $v^* < v_l$  : on serait tenté de conclure que toutes les planètes pourraient avoir une atmosphère.... mais il ne faut pas oublier que la vitesse satisfait une loi de distribution (à l'équilibre thermodynamique) et que  $v$  peut être supérieure à  $v^*$  2)  $v^*(N_2) = v_{IT} = 11,2 km.s^{-1}$  pour  $T = 141.10^3 K$  **A.2:** 1) En assimilant l'air à un GPD à  $T_{amb}$  :  $U_{air} = \frac{5}{2}n.R.T = \frac{5}{2}p.V = 250 J$  2)  $h = 25,5 m$  **A.3:** 1) La masse des glaçons est égale à la masse de fluide déplacée. Quand les glaçons fondent, leur masse ne varie pas donc le niveau d'eau ne varie pas. **B.1:** 1) Notons  $a$  la distance nécessaire pour qu'il y ait collision :  $a < d$  2) Volume utile  $V_u = (\pi.a^2).v^*. \Delta t$  3) Soit  $N_C$  le nombre de collision dans  $V_u$  :  $N_C = n^*.V_u$  4) Libre parcours moyen :  $\bar{l} = \frac{v^*. \Delta t}{N_C}$  En explicitant :  $\bar{l} = \frac{1}{n^*. \pi.a^2}$  5) En se plaçant à la limite  $a = d$ , avec  $p.V = n.R.T = N.k_B.T$ ;  $n^* = \frac{N}{V} = \frac{p}{k_B.T}$  :  $\bar{l} = \frac{k_B.T}{p.\pi.a^2}$  A.N.: En prenant  $T = 300 K$  et  $p = 10^5 Pa$ , en ordre de grandeur  $\bar{l} = 100 nm$  ce qui est conforme au résultat attendu (cf cours) **B.4:** 1) cf cours 2)  $\frac{dN}{dt} = -\frac{N.s}{6.V}v^*$  soit  $N(t) = N_0.e^{-\frac{t}{\tau}}$  avec  $\tau = \frac{6.V}{s.v^*}$  3)  $t_0 = \tau.ln2$  **B.5:** 1)  $dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{N_1(t)}{6V}(s.v^*.dt)$ . De la même manière :  $dN_{2 \rightarrow 1} = \frac{N_2(t)}{6V}(s.v^*.dt)$  2)  $dN_1 = dN_{2 \rightarrow 1} - dN_{1 \rightarrow 2}$  et  $dN_2 : dN_2 = -dN_1$  3) En explicitant :  $\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = \frac{N_2(t) - N_1(t)}{6V}(s.v^*)$ . Avec  $N_1(t) + N_2(t) = N_A$  :  $\frac{dN_1}{dt} + \frac{s.v^*}{3.V}N_1(t) = \frac{N_A}{6V}(s.v^*)$  et on établit que  $N_1(t) = \frac{N_A}{2}\left(1 + e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$  et  $N_2(t) = \frac{N_A}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$  4)  $\tau = \frac{3.V}{s.v^*}$  5) Si  $m$  augmente,  $v^*$  diminue donc  $\tau$  augmente 6) Ce dispositif permet de "séparer" des mélanges gazeux