Corrigé : Cycles moteurs de Carnot, Beau de Rochas et Stirling

1 : Machine ditherme

1.a : Soit le système constitué par la masse m de gaz décrivant une évolution cyclique. Appliquons le premier principe au système sur un cycle : $W + Q_C + Q_f = 0$. En appliquant le deuxième principe au système sur un cycle : $\Delta S = S^e + S^P = 0$. Les transferts thermiques s'effectuent au contact de thermostats de températures T_f et T_C donc : $S_e = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_f}{T_f}$ soit :

$$W + Q_C + Q_f = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_f}{T_f} + S^P = 0 \qquad (2)$$

1.b : Pour un cycle moteur : $W < 0$; $Q_C > 0$ et $Q_f < 0$

1.c : Le coefficient d'efficacité est donné par : $\eta = \left|\frac{W}{Q_C}\right| = -\frac{W}{Q_C}$ En utilisant (1) : $\eta = \frac{Q_C + Q_f}{Q_C} = 1 + \frac{Q_f}{Q_C}$.

En utilisant (2) : $\frac{Q_f}{Q_C} = -\frac{T_f}{T_C} - \frac{T_f . S^P}{Q_C}$ donc :

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_C} - \frac{T_f . S^P}{Q_C}$$

1.d : Sur un cycle réversible $S^P = 0$:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_f}{T_C}$$

A.N. : $\eta_C = 1 - \frac{290}{1450} = 0{,}8$

Le coefficient d'efficacité d'une machine ditherme réversible ne dépend que des températures T_f et T_C. Il ne résulte pas d'imperfections éventuelles de la machine mais bien d'une limitation fondamentale imposée par le second principe et qui se traduit par $Q_f < 0$.

2. Cycle de Beau de Rochas et Otto

2.a : Un gaz parfait subissant une évolution isentropique satisfait la relation de Laplace :

$$p.V^\gamma = cte$$

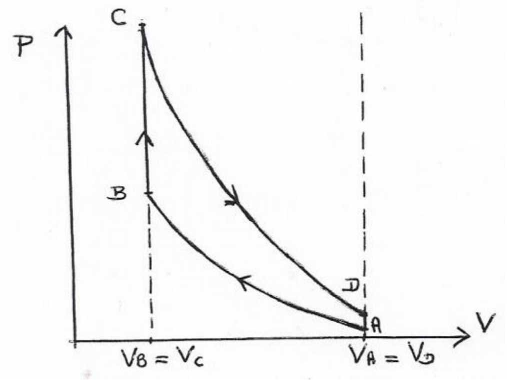
Ce qui conduit à :

$$p_B = p_A . \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^\gamma = p_A . {\alpha_V}^\gamma = 18{,}4\ bar$$

$$p_D = p_C . \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^\gamma = p_C . {\alpha_V}^{-\gamma} = 2{,}2\ bar$$

Les évolutions BC et DA sont isochores donc $V_D = V_A = \frac{n.R.T_A}{p_A} = \left(\frac{2{,}9}{29}\right)\frac{8{,}3.290}{10^5} = 2{,}4\ L$ et $V_B = V_C = \frac{V_A}{\alpha_V} = 0{,}3\ L$.

2.b :



Le cycle est décrit dans le sens horaire donc $W < 0$ ce qui correspond bien à un cycle moteur.

2.c : Coefficient d'efficacité : $\eta_{BO} = \left|\frac{W}{Q_C}\right| = -\frac{W}{Q_C} = 1 + \frac{Q_f}{Q_C}$ Les transferts thermiques Q_f et Q_C s'effectuent sur les isochores BC et DA (pas de transfert thermique sur les isentropiques qui par définitions sont adiabatiques). En appliquant le premier principe sur chacune des isochores :
$\Delta U_{BC} = \frac{n.R}{\gamma-1}(T_C - T_B) = Q_{BC} > 0$; sachant que $Q_C > 0$, $Q_C = Q_{BC} = \frac{n.R}{\gamma-1}(T_C - T_B)$
$\Delta U_{DA} = \frac{n.R}{\gamma-1}(T_A - T_D) = Q_{DA} < 0$ donc $Q_f = Q_{DA} = \frac{n.R}{\gamma-1}(T_A - T_D)$
On en déduit que : $\eta_{BO} = 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B}$ avec $T_D = \frac{p_D.V_D}{n.R} = 636{,}1\ K$ et $T_B = \frac{p_B.V_B}{n.R} = 665{,}1\ K$

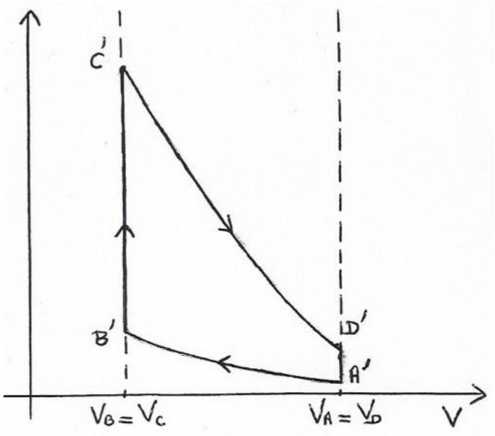
$$\eta_{BO} = 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} = 0{,}56$$

On constate que $\eta_{BO} < \eta_C$. Ceci est dû au fait que le cycle de Beau de Rochas n'est pas réversible. En effet, les transferts thermiques Q_f et Q_C s'effectuent sur des isochores ce qui provoque des gradients de température dans le système (sources d'irréversibilité).

3. Cycle de Stirling
3.a : Sur une isotherme, l'équation d'état des gaz parfaits conduit à : $p.V = cte$

$$p_{B'} = p_{A'}.\left(\frac{V_{A'}}{V_{B'}}\right) = p_{A'}.\alpha_V = 8\ bar \text{ et } p_{D'} = p_{C'}.\left(\frac{V_{C'}}{V_{D'}}\right) = p_{C'}.\alpha_V{}^{-1} = 5\ bar$$

3.b :



On vérifie que le cycle de Stirling est également décrit dans le sens horaire (cycle moteur) et on constate que l'aire du cycle est plus importante que celle du cycle de Beau de Rochas donc $|W_S| > |W_{BO}|$.

3.c : Coefficient d'efficacité du cycle de Stirling : $\eta_S = \left|\frac{W}{Q_C}\right| = -\frac{W}{Q_C}$
Les transferts thermiques Q_C et Q_f s'effectuent sur $B'C'$ et $C'D'$ (pour Q_C) et $A'B'$ puis $D'A'$ (pour Q_f).
$W = W_{A'B'} + W_{B'C'} + W_{C'D'} + W_{D'A'} = W_{A'B'} + W_{C'D'}$ car le travail des forces pressantes est nulle sur les isochores.

$$W_{A'B'} = -\int_{A'}^{B'} p_{ext}.dV = -\int_{A'}^{B'} p.dV = -n.R.T_{A'}.\int_{A'}^{B'} \frac{dV}{V} = -n.R.T_{A'}.ln\left(\frac{V_{B'}}{V_{A'}}\right) = n.R.T_{A'}.ln\alpha_V = 501\ J$$

De même $W_{C'D'} = -n.R.T_{C'}.ln\alpha_V = -2503\ J$. $Q_C = Q_{B'C'} + Q_{C'D'}$. Sur l'isochore $B'C'$: $Q_{B'C'} = \Delta U_{B'C'} = \frac{n.R}{\gamma-1}(T_{C'} - T_{B'}) = 2407\ J$ avec $T_{B'} = T_{A'}$. Sur l'isotherme $C'D'$: $Q_{C'D'} = -W_{C'D'}$ car $\Delta U_{C'D'} = 0$. On en déduit que :

$$W = -2002\ J \text{ ; } Q_C = 4910\ J \text{ et } \eta_S = 0{,}41$$

On constate que $\eta_S < \eta_{BO} < \eta_C$. Même si $|W_S| > |W_{BO}|$, le coefficient d'efficacité du moteur de Stirling est inférieur à celui du moteur de Beau de Rochas, ce qui implique qu'il consomme davantage.

Remarque : Dans cet exercice, nous avons supposé que $Q_C = Q_{B'C'} + Q_{C'D'}$. Dans la pratique, les transferts thermiques sur les deux isochores se compensent et on peut faire l'hypothèse que $Q_C = Q_{C'D'}$. Dans ce cas, le coefficient d'efficacité du cycle de Stirling est égal à celui du cycle de Carnot.