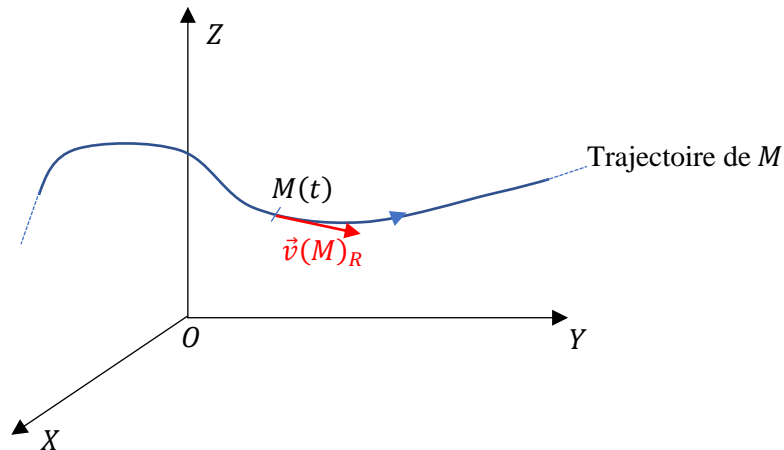


**Chap I : Cinématique du point (suite)**
**III : Vitesse et accélération**
**1) Définitions**

Soit  $M$  un point en mouvement dans le référentiel  $R$  :



On note  $\overrightarrow{OM}(t)$  le vecteur position du point  $M$  à l'instant  $t$  et  $\vec{v}(M)_R$  la vitesse du point  $M$  définie par :

$$\vec{v}(M)_R = \left( \frac{\overrightarrow{M(t)M(t+dt)}}{dt} \right)_R = \left( \frac{d\vec{l}}{dt} \right)_R = \left( \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_R$$

La vitesse correspond au rapport de la distance élémentaire parcourue entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , par unité de temps. Par définition, la vitesse est tangente à la trajectoire du point  $M$  dans le référentiel d'étude.

Nous retiendrons que :

$$\vec{v}(M)_R = \left( \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_R$$

**Homogénéité et unité :**  $[v] = L \cdot T^{-1}$  donc l'unité de vitesse dans le système international est le  $m \cdot s^{-1}$ .

On note  $\vec{a}(M)_R$  l'accélération du point  $M$  dans le référentiel  $R$  définie par :

$$\vec{a}(M)_R = \left( \frac{d\vec{v}(M)_R}{dt} \right)_R = \left( \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_R$$

**Homogénéité et unité :**  $[a] = L \cdot T^{-2}$  donc l'unité d'accélération dans le système international est le  $m \cdot s^{-2}$ .

## 2) Vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes

Sachant que la position du point  $M$  est donnée par :  $\overrightarrow{OM}(t) = x(t).\vec{u}_x + y(t).\vec{u}_y + z(t).\vec{u}_z$  ; explicitons la vitesse et l'accélération en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v}(M)_R = \frac{d}{dt}(x(t).\vec{u}_x) + \frac{d}{dt}(y(t).\vec{u}_y) + \frac{d}{dt}(z(t).\vec{u}_z)$$

En développant :

$$\vec{v}(M)_R = \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_R .\vec{u}_x + x(t).\left(\frac{d\vec{u}_x}{dt}\right)_R + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)_R .\vec{u}_y + y(t).\left(\frac{d\vec{u}_y}{dt}\right)_R + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)_R .\vec{u}_z + z(t).\left(\frac{d\vec{u}_z}{dt}\right)_R$$

En notant que les vecteurs de la base de coordonnées cartésiennes  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  sont des vecteurs constants, on établit que :

$$\vec{v}(M)_R = \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_R .\vec{u}_x + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)_R .\vec{u}_y + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)_R .\vec{u}_z$$

Rq. : Avec  $\vec{dl} = dx.\vec{u}_x + dy.\vec{u}_y + dz.\vec{u}_z$  on vérifie que  $\vec{v}(M)_R = \left(\frac{dl}{dt}\right)_R = \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_R .\vec{u}_x + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)_R .\vec{u}_y + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)_R .\vec{u}_z$ . La vitesse est égale au déplacement élémentaire  $\vec{dl}$  divisé par l'intervalle de temps  $dt$ .

En adoptant les notations newtoniennes :

$$\vec{v}(M)_R = \dot{x}(t).\vec{u}_x + \dot{y}(t).\vec{u}_y + \dot{z}(t).\vec{u}_z$$

De la même manière, on établit l'expression de l'accélération :

$$\vec{a}(M)_R = \left(\frac{d\vec{v}(M)_R}{dt}\right)_R = \ddot{x}(t).\vec{u}_x + \ddot{y}(t).\vec{u}_y + \ddot{z}(t).\vec{u}_z$$

Nous retiendrons qu'en coordonnées cartésiennes, la vitesse et l'accélération sont données par :

$$\begin{aligned} \vec{v}(M)_R &= \dot{x}(t).\vec{u}_x + \dot{y}(t).\vec{u}_y + \dot{z}(t).\vec{u}_z \\ \vec{a}(M)_R &= \ddot{x}(t).\vec{u}_x + \ddot{y}(t).\vec{u}_y + \ddot{z}(t).\vec{u}_z \end{aligned}$$

**Exercice :**

A l'instant  $t = 0$ , deux navires sont situés sur un même méridien. Le navire  $N_1$  est à la distance  $a$  au nord du navire  $N_2$ .

1)  $N_2$  se dirige vers le nord à la vitesse  $v_2$  constante,  $N_1$  vers l'est avec la vitesse  $v_1$  constante. Quelle sera la distance minimale d'approche entre les deux navires ?

2)  $N_1$  se dirige vers l'est avec la vitesse  $v_1$  constante, quelle direction doit prendre  $N_2$  pour atteindre  $N_1$  en ligne droite ? Calculer la durée correspondante.



## 3) Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

**-a- Vitesse en coordonnées cylindriques**

Nous savons qu'en coordonnées cylindriques, la position du point  $M$  est donnée par (cf II-2) :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t) \cdot \vec{u}_r + z(t) \cdot \vec{u}_z$$

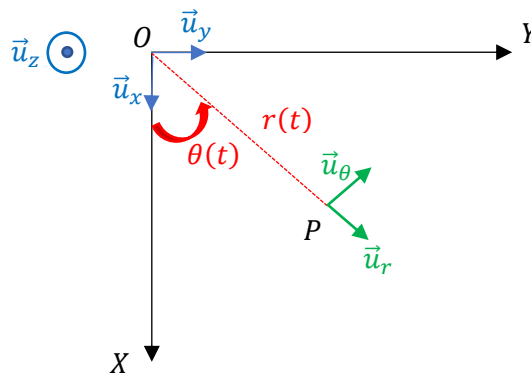
Sachant que la vitesse est définie par  $\vec{v}(M)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R$  déterminons la vitesse du point  $M$  en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v}(M)_R = \frac{d}{dt}(r(t) \cdot \vec{u}_r) + \frac{d}{dt}(z(t) \cdot \vec{u}_z)$$

En explicitant :

$$\vec{v}(M)_R = \left(\frac{dr(t)}{dt}\right)_R \cdot \vec{u}_r + r(t) \cdot \left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right)_R + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)_R \cdot \vec{u}_z + z(t) \cdot \left(\frac{d\vec{u}_z}{dt}\right)_R$$

Contrairement aux vecteurs de la base de coordonnées cartésiennes, le vecteur  $\vec{u}_r$  n'est pas constant donc  $\left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right)_R \neq \vec{0}$ . Pour déterminer  $\left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right)_R$  explicitons les vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  dans la base de coordonnées cartésienne (vue de dessus) :



$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos \theta(t) \cdot \vec{u}_x + \sin \theta(t) \cdot \vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin \theta(t) \cdot \vec{u}_x + \cos \theta(t) \cdot \vec{u}_y \end{cases}$$

On peut alors exprimer  $\left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right)_R$  :

$$\left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right)_R = \left(\frac{d \cos \theta(t)}{dt}\right) \cdot \vec{u}_x + \left(\frac{d \sin \theta(t)}{dt}\right) \cdot \vec{u}_y$$

$$\left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right)_R = -\dot{\theta}(t) \cdot \sin \theta(t) \cdot \vec{u}_x + \dot{\theta}(t) \cdot \cos \theta(t) \cdot \vec{u}_y$$

On constate que :

$$\left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right)_R = \dot{\theta}(t) \cdot \vec{u}_\theta$$

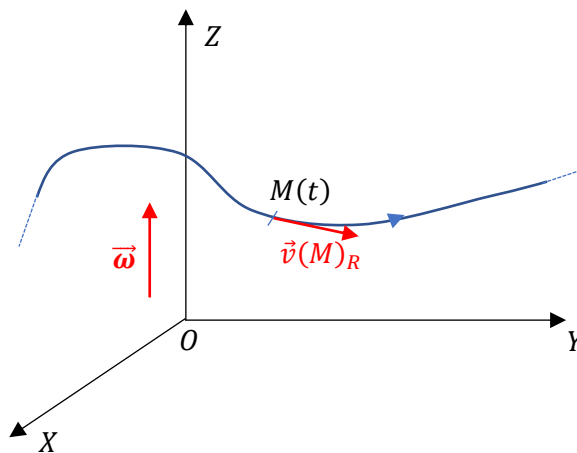
En adoptant les notations newtoniennes, on établit l'expression de la vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v}(M)_R = \dot{r}(t) \cdot \vec{u}_r + r(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \vec{u}_\theta + \dot{z}(t) \cdot \vec{u}_z$$

Rq. : Avec  $d\vec{l} = dr \cdot \vec{u}_r + r \cdot d\theta \cdot \vec{u}_\theta + dz \cdot \vec{u}_z$  on vérifie que  $\vec{v}(M)_R = \left(\frac{d\vec{l}}{dt}\right)_R = \dot{r}(t) \cdot \vec{u}_r + r(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \vec{u}_\theta + \dot{z}(t) \cdot \vec{u}_z$ .

### -b- Vecteur rotation instantanée

On note  $\vec{\omega}$  le vecteur rotation instantanée défini par :  $\vec{\omega} = \dot{\theta}(t) \cdot \vec{u}_z$



En notant que :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{u}_r = \dot{\theta}(t) \cdot \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = \dot{\theta}(t) \cdot \vec{u}_\theta$$

On peut dire que :

$$\left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right)_R = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_r$$

De la même manière, on montre que :

$$\left(\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right)_R = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_\theta$$

En explicitant :

$$\left(\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right)_R = \dot{\theta}(t) \cdot \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta = -\dot{\theta}(t) \cdot \vec{u}_r$$

Nous retiendrons que :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right)_R &= \vec{\omega} \wedge \vec{u}_r = \dot{\theta}(t) \cdot \vec{u}_\theta \\ \left(\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right)_R &= \vec{\omega} \wedge \vec{u}_\theta = -\dot{\theta}(t) \cdot \vec{u}_r \end{aligned}$$

**-c- Accélération en coordonnées cylindriques**

Sachant que  $\vec{a}(M)_R = \left(\frac{d\vec{v}(M)_R}{dt}\right)_R$  avec  $\vec{v}(M)_R = \dot{r}(t) \cdot \vec{u}_r + r(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \vec{u}_\theta + \dot{z}(t) \cdot \vec{u}_z$ , établissons l'expression de l'accélération en coordonnées cylindriques :

$$\vec{a}(M)_R = \frac{d}{dt}(\dot{r}(t) \cdot \vec{u}_r) + \frac{d}{dt}(r(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \vec{u}_\theta) + \frac{d}{dt}(\dot{z}(t) \cdot \vec{u}_z)$$

Avec :

$$\frac{d}{dt}(\dot{r}(t) \cdot \vec{u}_r) = \left(\frac{d\dot{r}(t)}{dt}\right) \cdot \vec{u}_r + \dot{r}(t) \cdot \left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right)_R = \ddot{r}(t) \cdot \vec{u}_r + \dot{r}(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d}{dt}(r(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \vec{u}_\theta) = \left(\frac{d(r(t) \cdot \dot{\theta}(t))}{dt}\right) \cdot \vec{u}_\theta + (r(t) \cdot \dot{\theta}(t)) \cdot \left(\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right)_R$$

$$\frac{d}{dt}(r(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \vec{u}_\theta) = (\dot{r}(t) \cdot \dot{\theta}(t) + r(t) \cdot \ddot{\theta}(t)) \cdot \vec{u}_\theta + (r(t) \cdot \dot{\theta}(t)) \cdot (-\dot{\theta}(t) \cdot \vec{u}_r)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{z}(t) \cdot \vec{u}_z) = \ddot{z}(t) \cdot \vec{u}_z$$

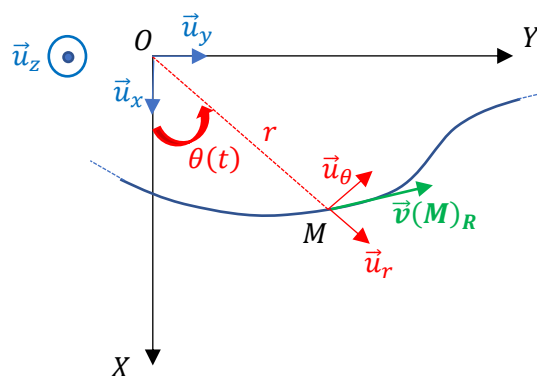
On en déduit l'expression de l'accélération en coordonnées cylindriques :

$$\vec{a}(M)_R = (\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2) \cdot \vec{u}_r + (2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta} + r \cdot \ddot{\theta}) \cdot \vec{u}_\theta + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z$$

On vérifie que dans cette expression, tous les termes sont bien homogènes à une accélération.

**-d- Coordonnées polaires**

Dans le cas particulier où la trajectoire de  $M$  est plane dans le référentiel  $R$ , en posant que  $z = 0$ , que deviennent les vecteurs position, vitesse et accélération ?



$$\overline{OM}(t) = r(t) \cdot \vec{u}_r$$

$$\vec{v}(M)_R = \dot{r} \cdot \vec{u}_r + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}(M)_R = (\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2) \cdot \vec{u}_r + (2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta} + r \cdot \ddot{\theta}) \cdot \vec{u}_\theta$$

**Vocabulaire :** on appelle composante radiale du vecteur, sa composante sur  $\vec{u}_r$  et composante orthoradiale, sa composante sur  $\vec{u}_\theta$ . Exemple : vitesse radiale  $v_r = \dot{r}$  et vitesse orthoradiale  $v_\theta = r \cdot \dot{\theta}$ .



Il est important de **connaître** et de **savoir redémontrer rapidement** ces expressions

## IV : Trajectoire circulaire et uniforme

### 1) Mouvement uniforme

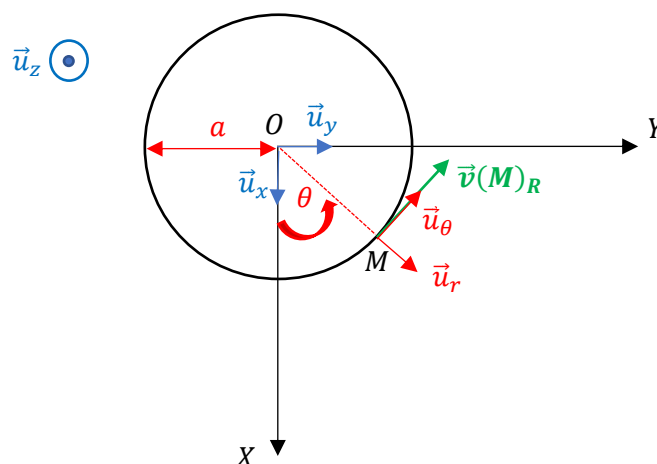
Soit  $M$  un point observé dans le référentiel  $R$ . On note  $\vec{v}(M)_R$  sa vitesse dans ce référentiel. On dit que le mouvement du point  $M$  est uniforme si la norme du vecteur vitesse est constante :

$$\|\vec{v}(M)_R\| = v(M)_R = \text{cte}$$

**Attention :** il ne suffit pas que le mouvement du point  $M$  soit uniforme pour que son accélération soit nulle... Pour que l'accélération du point  $M$  soit nulle, il faut que le vecteur vitesse du point  $M$  soit constant. Alors la trajectoire du point  $M$  est rectiligne et uniforme dans le référentiel d'étude.

### 2) Mouvement circulaire

Considérons un point  $M$  décrivant une trajectoire circulaire de rayon  $a$  dans le référentiel  $R$ . Exprimons les vecteurs vitesse et accélération en coordonnées polaires :



Avec  $r = a = \text{cte}$ , la vitesse et l'accélération deviennent :

$$\vec{v}(M)_R = a \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}(M)_R = -a \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}_r + a \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$$

## 3) Trajectoire circulaire et uniforme

Supposons désormais que le point  $M$  décrit une trajectoire **circulaire** et **uniforme** à la vitesse  $\|\vec{v}(M)_R\| = v_0 = \text{cte}$ . En explicitant la vitesse, on établit que :

$$v_0 = a \cdot \dot{\theta} = \text{cte}$$

Soit :

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{a} = \text{cte}$$

Si la trajectoire de  $M$  est circulaire et uniforme on constate que sa vitesse angulaire est constante. Quand la vitesse angulaire est constante, il est d'usage de la noter  $\omega$  :

$$\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$$

Alors :

$$v_0 = a \cdot \omega = \text{cte}$$

Exprimons l'accélération :

$$\vec{a}(M)_R = -a \cdot \omega^2 \cdot \vec{u}_r = -\frac{v_0^2}{a} \vec{u}_r$$

On constate que pour une trajectoire circulaire et uniforme, l'accélération du point  $M$  est centripète (c.à.d. sur  $-\vec{u}_r$ ) dans le référentiel d'étude.

Nous retiendrons que pour une trajectoire circulaire et uniforme :

$$\begin{aligned} \vec{v}(M)_R &= a \cdot \omega \cdot \vec{u}_\theta \\ \vec{a}(M)_R &= -a \cdot \omega^2 \cdot \vec{u}_r = -\frac{v_0^2}{a} \vec{u}_r \end{aligned}$$

## 4) Exercice

Une roue animée d'un mouvement rectiligne et uniforme roule sur une route à la vitesse  $\vec{v}_0 = \text{cte}$  (vitesse du centre  $G$  de la roue dans le référentiel d'étude). On note  $M$  un point attaché à la périphérie de la roue,  $G$  son centre et  $I$  le point de contact de la roue avec le sol à l'instant  $t$ . On appelle  $\theta(t)$  l'angle  $(\overrightarrow{GI}; \overrightarrow{GM})$ . A l'origine des temps,  $M$  est à l'origine  $O$  du référentiel  $R$  lié au sol ( $\theta(0) = 0$ ).

1) Faites un schéma de la situation à  $t = 0$  et à un instant  $t$  quelconque.

2) On fait l'hypothèse que la roue « roule sans glisser » sur le sol. On note  $r_0$  le rayon de la roue. Etablir une relation entre la longueur  $OI(t)$  parcourue sur le sol et la longueur de l'arc  $IM(t)$  sur la roue.

3) Etablir les équations paramétriques  $x(\theta)$  et  $y(\theta)$  de la trajectoire de  $M$  dans le référentiel  $R$ .

4) Représenter l'allure de la trajectoire de  $M$  dans  $R$ .

5) Déterminer les composantes du vecteur vitesse  $\dot{x}(t)$  et  $\dot{y}(t)$  du point  $M$  dans  $R$  puis l'expression de la norme du vecteur vitesse  $v(M)_R$ . En quels points la vitesse est-elle maximale ? En quels point la vitesse est-elle nulle ?

6) Déterminer l'expression de l'accélération  $\vec{a}(M)_R$  en coordonnées cartésiennes. Exprimer cette accélération en fonction du vecteur  $\overrightarrow{GM}$  et commenter cette expression.

