

Corrigé du problème : méthode de Rückhardt

1) Appliquons le deuxième principe de la thermodynamique aux n moles de gaz parfait entre un état initial E_i et un état final E_f :

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = S_{i \rightarrow f}^e + S_{i \rightarrow f}^c$$

Dans l'hypothèse que l'évolution soit réversible ($S_{i \rightarrow f}^c = 0$) et adiabatique :

$$S_{i \rightarrow f}^e = \int_i^f \frac{\delta Q}{T_{\text{front}}(t)} = 0$$

On vérifie que l'évolution est isentropique : $\Delta S_{i \rightarrow f} = 0$.

Appliquons l'identité thermodynamique fournie dans l'énoncé, entre E_i et E_f :

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = \frac{n \cdot R}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + n \cdot R \cdot \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = 0$$

On établit que :

$$\ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + (\gamma - 1) \cdot \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = 0$$

Soit :

$$T_f \cdot V_f^{\gamma-1} = T_i \cdot V_i^{\gamma-1}$$

L'évolution est lente. Cette relation est donc vérifiée à tout instant : $T \cdot V^{\gamma-1} = \text{cte}$. En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits, on établit la relation de Laplace :

$$p \cdot V^\gamma = \text{cte}$$

2) La section s du tube est très petite ($s = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$). Dans l'hypothèse que l'amplitude des oscillations de la bille soit faible, on peut considérer que les variations de volume du gaz parfait résultant du mouvement de la bille sont très faibles devant le volume de la bouteille...on peut alors considérer que $dV = V - V_0$ et donc que $dP = P - P_0$.

Nous savons que le gaz satisfait l'équation de Laplace : $p \cdot V^\gamma = \text{cte}$. Considérons la dérivée logarithmique de cette relation :

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

On en déduit que :

$$dP = -\gamma \cdot \left(\frac{P}{V} \right) \cdot dV$$

Avec $dP = P - P_0$, au voisinage de l'état $E_0(P_0; V_0; T_0)$:

$$P - P_0 = -\gamma \cdot \left(\frac{P_0}{V_0} \right) \cdot dV$$

En notant que $dV = s \cdot z$ (avec $z < 0$) :

$$P - P_0 = -\gamma \cdot \left(\frac{P_0}{V_0} \right) \cdot s \cdot z$$

3) On assimile la bille à un point matériel M de masse m observé dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Dans ce référentiel, le point matériel est soumis à :

- son poids : $\vec{p} = -m \cdot g \cdot \vec{u}_z$
- la force de pression exercée par l'atmosphère : $\vec{F}_0 = -P_0 \cdot s \cdot \vec{u}_z$

- la force de pression exercée par le G.P : $\vec{F}_{GP} = P \cdot s \cdot \vec{u}_z$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique au point matériel :

$$m \cdot \vec{a}(M) = \vec{p} + \vec{F}_0 + \vec{F}_{GP}$$

En explicitant et en projetant sur \vec{u}_z on établit que :

$$m \cdot \ddot{z} = -m \cdot g - P_0 \cdot s + P \cdot s$$

$$m \cdot \ddot{z} = -m \cdot g + (P - P_0) \cdot s$$

En utilisant l'expression établie à la question 2) :

$$m \cdot \ddot{z} = -m \cdot g - \left(\gamma \cdot \left(\frac{P_0}{V_0} \right) \cdot s^2 \right) \cdot z$$

On établit l'équation différentielle :

$$\ddot{z} + \left(\frac{\gamma \cdot P_0 \cdot s^2}{m \cdot V_0} \right) \cdot z = -g \quad (1)$$

Sachant que :

$$z = -\frac{V_0}{\gamma \cdot P_0 \cdot s} (P - P_0) \quad \text{et} \quad \dot{z} = -\frac{V_0}{\gamma \cdot P_0 \cdot s} \dot{P}$$

On établit l'équation différentielle vérifiée par P :

$$\ddot{P} + \left(\frac{\gamma \cdot P_0 \cdot s^2}{m \cdot V_0} \right) \cdot P = \frac{\gamma \cdot P_0 \cdot s \cdot g}{V_0} + \frac{\gamma \cdot P_0^2 \cdot s^2}{m \cdot V_0} \quad (2)$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

4) On note ω la pulsation des oscillations :

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma \cdot P_0 \cdot s^2}{m \cdot V_0}} = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

La période des oscillations est donnée par :

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot V_0}{\gamma \cdot P_0 \cdot s^2}}$$

A partir de l'enregistrement, mesure de la période T : $17 \cdot T = 19,0 \text{ s}$ donc $T = 1,12 \text{ s}$. Avec :

$$\gamma = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot V_0}{P_0 \cdot s^2 \cdot T^2}$$

A.N. : $\gamma = 1,31$. Si on assimile l'air à un gaz parfait diatomique (composé à 98% de N_2 et de O_2) alors

$C_{Vmol} = \frac{5 \cdot R}{2}$ et $C_{Pmol} = \frac{7 \cdot R}{2}$ donc :

$$\gamma = \frac{C_{Pmol}}{C_{Vmol}} = \frac{7}{5} = 1,40$$

On constate que la valeur de γ mesurée est proche de la valeur attendue (écart relatif de 6 %).

5) A l'équilibre $\ddot{z} = 0$. A partir de la relation (1) on établit que :

$$z_{\acute{e}q} = -\frac{m \cdot V_0 \cdot g}{\gamma \cdot P_0 \cdot s^2}$$

A.N. : $z_{\acute{e}q} = -31,1 \text{ cm}$: cette valeur n'est pas compatible avec la position d'équilibre réelle de la bille qui est de $-41,0 \text{ cm}$.

6-1) Le gaz est en contact thermique avec un thermostat de température T_{ext} . Appliquons l'équation d'état des GP aux n moles de gaz contenues dans la bouteille dans l'état initial et dans l'état final :

- Dans l'état initial : $P_0 \cdot V_0 = n \cdot R \cdot T_{ext}$
- Dans l'état final : $P_{\acute{e}q} \cdot V_{\acute{e}q} = n \cdot R \cdot T_{ext}$ avec $P_{\acute{e}q} = P_0 + \frac{m \cdot g}{s}$ et $V_{\acute{e}q} = V_0 + z'_{\acute{e}q} \cdot s$

En explicitant :

$$P_0 \cdot V_0 = \left(P_0 + \frac{m \cdot g}{s} \right) \cdot (V_0 + z'_{\acute{e}q} \cdot s)$$

On établit que :

$$z'_{\acute{e}q} = \left(\frac{1}{1 + \frac{m \cdot g}{s \cdot P_0}} - 1 \right) \cdot \frac{V_0}{s}$$

Sachant que $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x$ pour $x \ll 1$, avec $P_0 \gg \frac{m \cdot g}{s}$:

$$\frac{1}{1 + \frac{m \cdot g}{s \cdot P_0}} = \left(1 + \frac{m \cdot g}{s \cdot P_0} \right)^{-1} = 1 - \frac{m \cdot g}{s \cdot P_0}$$

$$z'_{\acute{e}q} = -\frac{m \cdot g \cdot V_0}{P_0 \cdot s^2}$$

A.N. : $z'_{\acute{e}q} = -40,7 \text{ cm}$: cette valeur est beaucoup plus proche de la position d'équilibre réelle de la bille. Ceci implique que l'évolution du gaz n'est pas adiabatique...

6-2) Appliquons le premier principe de la thermodynamique au système {bille + gaz parfait contenu dans la bouteille} entre l'état initial et l'état final :

$$\Delta E_{tot}(\text{syst}) = \Delta E_{m,M}(\text{syst}) + \Delta U(\text{syst}) = W_p + Q$$

6-3) L'énergie mécanique et l'énergie interne sont des grandeurs extensives donc :

- $\Delta E_{m,M}(\text{syst}) = \Delta E_{m,M}(\text{bille}) + \Delta E_{m,M}(\text{gaz})$: le gaz est au repos dans l'état initial et dans l'état final. On peut négliger la variation d'énergie mécanique du gaz devant celle de la bille :

$$\Delta E_{m,M}(\text{syst}) = \Delta E_{m,M}(\text{bille}) = m \cdot g \cdot z'_{\acute{e}q}$$

- $\Delta U(\text{syst}) = \Delta U(\text{bille}) + \Delta U(\text{gaz})$: en négligeant la capacité thermique de la bille devant celle du gaz :

$$\Delta U(\text{syst}) = \Delta U(\text{gaz}) = \frac{n \cdot R}{\gamma - 1} (T_f - T_i) = \frac{n \cdot R}{\gamma - 1} (T_{ext} - T_{ext}) = 0$$

- Travail des forces de pression exercées par l'atmosphère :

$$W_P = \int_i^f \delta W_P = - \int_i^f P_0 \cdot dV = -P_0 \cdot s \cdot z'_{\acute{e}q}$$

En explicitant, on établit que :

$$m \cdot g \cdot z'_{\acute{e}q} = -P_0 \cdot s \cdot z'_{\acute{e}q} + Q$$

$$Q = (m \cdot g + P_0 \cdot s) \cdot z'_{\acute{e}q} = P_{\acute{e}q} \cdot s \cdot z'_{\acute{e}q}$$

A.N. : $Q = -8,27 J$: on constate que $Q < 0$ donc le système cède de l'énergie thermique au milieu extérieur... l'évolution n'est pas adiabatique ni isentropique : la relation de Laplace n'est pas vérifiée.

6-4) La variation d'entropie est donnée par l'identité thermodynamique :

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = \frac{n \cdot R}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + n \cdot R \cdot \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = n \cdot R \cdot \ln(1 - X)$$

avec $T_i = T_f = T_{ext}$ et $V_i = V_0$; $V_f = V_0 + s \cdot z'_{\acute{e}q} = V_0 - \frac{m \cdot g \cdot V_0}{P_0 \cdot s} = V_0 \cdot \left(1 - \frac{m \cdot g}{P_0 \cdot s} \right) = V_0 \cdot (1 - X)$.

Entropie échangée :

$$S_{i \rightarrow f}^e = \int_i^f \frac{\delta Q}{T_{front}(t)} = \int_i^f \frac{\delta Q}{T_{ext}} = \frac{1}{T_{ext}} \int_i^f \delta Q = \frac{Q}{T_{ext}}$$

En explicitant Q :

$$S_{i \rightarrow f}^e = \frac{(m \cdot g + P_0 \cdot s) \cdot z'_{\acute{e}q}}{T_{ext}} = \frac{P_{\acute{e}q} \cdot s \cdot z'_{\acute{e}q}}{T_{ext}}$$

Sachant que $P_{\acute{e}q} \cdot V_{\acute{e}q} = n \cdot R \cdot T_{ext}$:

$$S_{i \rightarrow f}^e = n \cdot R \cdot \left(\frac{P_{\acute{e}q} \cdot s \cdot z'_{\acute{e}q}}{P_{\acute{e}q} \cdot V_{\acute{e}q}} \right) = - \frac{n \cdot R \cdot X}{1 - X}$$

Sachant que $P_0 \gg \frac{m \cdot g}{s}$ nous savons que $X = \frac{m \cdot g}{P_0 \cdot s} \ll 1$ donc :

$$S_{i \rightarrow f}^e = - \frac{n \cdot R \cdot X}{1 - X} = -n \cdot R \cdot X \cdot (1 - X)^{-1} = -n \cdot R \cdot X \cdot (1 + X)$$

Avec :

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = S_{i \rightarrow f}^e + S_{i \rightarrow f}^c$$

$$S_{i \rightarrow f}^c = \Delta S_{i \rightarrow f} - S_{i \rightarrow f}^e$$

En explicitant :

$$S_{i \rightarrow f}^c = n \cdot R \cdot (\ln(1 - X) + X \cdot (1 + X))$$

A.N. : si on considère que l'atmosphère est à la température $T_{ext} = 293 K$, $n = 0,411$ moles et $S_{i \rightarrow f}^c = 0,113 mJ \cdot K^{-1}$. On vérifie que $S_{i \rightarrow f}^c > 0$ ce qui est en accord avec le caractère irréversible de l'évolution.