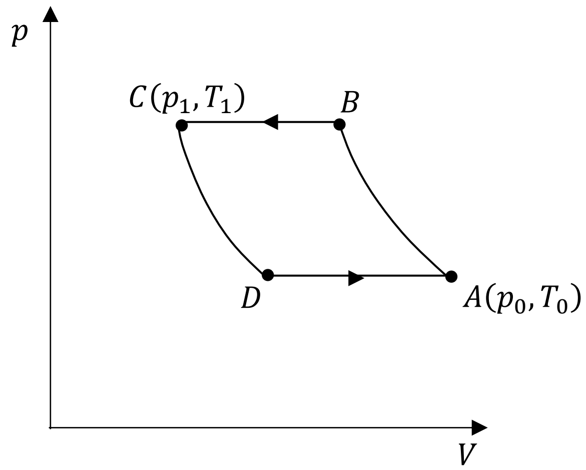
CLASSE DE PCSI 1 -corrigé du DL 11 DE PHYSIQUE

Problème n°1 : Pompe à chaleur à cycle de Joule inversé (ex B.3 du TD n° 4)

1) Allure du cycle de Joule inversé d'une pompe à chaleur dans le diagramme de Clapeyron :



Le cycle est décrit dans le sens anti-horaire. C'est un cycle récepteur $W > 0$.

2) Les formules de Laplace sont vérifiées si un gaz parfait subit une évolution isentropique (c.à.d. adiabatique et réversible). Formule de Laplace relative au couple (T, p) :

$$T.p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{cte}$$

Avec $\beta = 1 - \frac{1}{\gamma}$:

$$T.p^{-\beta} = \text{cte}$$

3) Nous savons que de $A \rightarrow B$ l'évolution est isentropique donc :

$$T_A.p_A{}^{-\beta} = T_B.p_B{}^{-\beta}$$

Soit :

$$T_B = T_A.\left(\frac{p_A}{p_B}\right)^{-\beta} = T_0.\left(\frac{1}{a}\right)^{-\beta} = T_0.a^{\beta}$$

De la même manière, de $C \rightarrow D$ l'évolution est isentropique donc :

$$T_C.p_C{}^{-\beta} = T_D.p_D{}^{-\beta}$$

Donc :

$$T_D = T_C.\left(\frac{p_C}{p_D}\right)^{-\beta} = T_1.(a)^{-\beta} = T_1.a^{-\beta}$$

A.N. : $T_B = 451\ K$ et $T_D = 187\ K$.

4) La pompe à chaleur est un récepteur thermique : $W > 0$, $Q_F > 0$ et $Q_C < 0$. La vocation de la pompe à chaleur est de chauffer la source chaude, son coefficient d'efficacité est donc :

$$e = \left|\frac{Q_C}{W}\right| = -\frac{Q_C}{W}$$

Sachant que sur un cycle :

$$W + Q_C + Q_F = 0$$

On en déduit que :

$$e = \frac{Q_C}{Q_C + Q_F} = \frac{1}{1 + \frac{Q_F}{Q_C}}$$

5) Les transferts thermiques Q_C et Q_F s'effectuent sur les isobares. En appliquant le premier principe au gaz sur un cycle on établit que (cf B.3) :

$$\Delta H_{B\to C} = n.C_{Pmol}.(T_C - T_B) = Q_C$$

$$\Delta H_{D\to A} = n.C_{Pmol}.(T_A - T_D) = Q_F$$

Soit :

$$\frac{Q_F}{Q_C} = \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} = -\frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = -\frac{T_1.a^{-\beta} - T_0}{T_1 - T_0.a^{\beta}}$$

En factorisant a^{β} au dénominateur :

$$\frac{Q_F}{Q_C} = -\left(\frac{T_1.a^{-\beta} - T_0}{T_1.a^{-\beta} - T_0}\right).\frac{1}{a^{\beta}} = -\frac{1}{a^{\beta}}$$

Soit :

$$e = \frac{1}{1 - a^{-\beta}}$$

A.N. : $e = 2{,}68$

6) Pour la pompe à chaleur, le cycle de Carnot serait également décrit dans le sens anti-horaire. Il serait composé de 2 isentropiques reliant les 2 isothermes T_0 et T_1.

7) Déterminons le coefficient d'efficacité de la pompe à chaleur fonctionnant selon un cycle de Carnot. De la même manière, on établit que :

$$e_C = \frac{1}{1 + \frac{Q_F}{Q_C}}$$

Sachant que le cycle de Carnot est décrit de manière réversible :

$$\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = 0$$

Donc :

$$\frac{Q_F}{Q_C} = -\frac{T_F}{T_C}$$

En notant $T_F = T_0$ et $T_C = T_1$ on établit que :

$$\frac{Q_F}{Q_C} = -\frac{T_0}{T_1}$$

$$e_C = \frac{1}{1 - \frac{T_0}{T_1}} = \frac{T_1}{T_1 - T_0}$$

A.N. : $e_C = 19{,}9$

8) On vérifie que $e < e_C$: l'efficacité de la pompe à chaleur est affectée par l'irréversibilité sur les isobares $B \to C$ et de $D \to A$.

9) Avec $S(T,p) = n.C_{Pmol}.\ln T - n.R.\ln p + \text{cte}$:
De $B \to C$:

$$\Delta S_{B\to C} = C_{Pmol}.\ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) - R.\ln\left(\frac{p_C}{p_B}\right) = C_{Pmol}.\ln\left(\frac{T_1}{T_B}\right)$$
$$S^e{}_{B\to C} = \frac{Q_{B\to C}}{T_1} = \frac{C_{Pmol}.(T_C - T_B)}{T_1} = \frac{C_{Pmol}.(T_1 - T_B)}{T_1}$$

Avec :

$$S^c{}_{B\to C} = \Delta S_{B\to C} - S^e{}_{B\to C}$$

$$S^c{}_{B\to C} = C_{Pmol}.\ln\left(\frac{T_1}{T_B}\right) - \frac{C_{Pmol}.(T_1 - T_B)}{T_1}$$

De $D \to A$:
De la même manière, on établit que :

$$S^c{}_{D\to A} = C_{Pmol}.\ln\left(\frac{T_0}{T_D}\right) - \frac{C_{Pmol}.(T_0 - T_D)}{T_0}$$

Sur un cycle, l'entropie créée est :

$$S^c = C_{Pmol}.\ln\left(\frac{T_1}{T_B}\right) + C_{Pmol}.\ln\left(\frac{T_0}{T_D}\right) - \frac{C_{Pmol}.(T_1 - T_B)}{T_1} - \frac{C_{Pmol}.(T_0 - T_D)}{T_0}$$

A.N. : On constate que (ce qui n'est pas une surprise puisque $\Delta S = 0$ sur le cycle) :

$$C_{Pmol}.\ln\left(\frac{T_1}{T_B}\right) + C_{Pmol}.\ln\left(\frac{T_0}{T_D}\right) = 0$$

$$S^c = C_{Pmol}.\left(\frac{T_B}{T_1} + \frac{T_D}{T_0} - 2\right)$$

Avec :

$$C_{Pmol} = \frac{\gamma.R}{\gamma - 1} = \frac{R}{\beta}$$

$$\frac{T_B}{T_1} = \frac{T_0.a^\beta}{T_1} = x$$

$$\frac{T_D}{T_0} = \frac{T_1.a^{-\beta}}{T_0} = \frac{1}{x}$$

On établit que :

$$S^c = \frac{R}{\beta}\left(x + \frac{1}{x} - 2\right)$$

10) Avec $x > 0$, on vérifie que $S^c \geq 0$ ce qui est en accord avec le second principe.

11) A.N. : on calcule $x = 1{,}50$ puis $S^c = 4{,}85\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$.

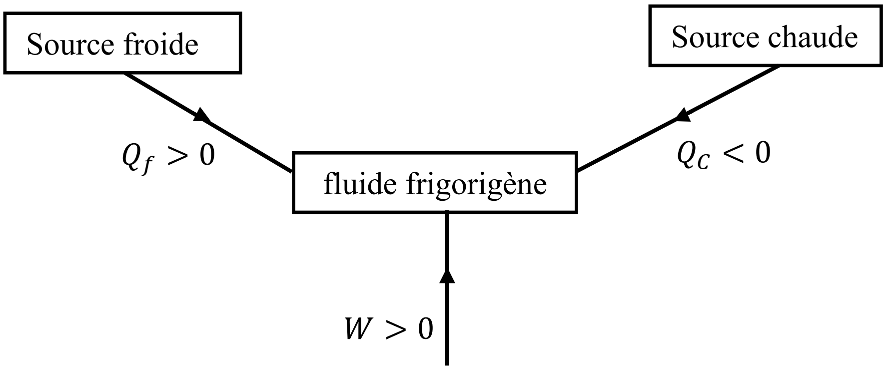
12) Avec :

$$e = \left|\frac{Q_C}{W}\right| = \frac{P_0}{P_{Comp}}$$

A.N. : $P_{Comp} = \frac{P_0}{e} = 7{,}46\ kw$

Problème n°2 : Modélisation d'une machine frigorifique (ex. B.7 du TD 4)

I.1 : Schéma de fonctionnement d'une machine frigorifique ditherme (en adoptant une convention récepteur pour le fluide) :



A partir des données, en grandeurs massiques, par identification on peut dire que :

$$q_f = q_{41} > 0$$
$$q_c = q_{23} < 0$$
$$w = w_{12} > 0$$

I.2 : La source chaude est le milieu extérieur au réfrigérateur. Le contact thermique entre le fluide et la source chaude s'effectue au niveau du serpentin situé à l'arrière du réfrigérateur. La source froide est constituée par « tout ce qu'il y a dans le réfrigérateur » (aliments et air). Le contact thermique avec la source froide s'effectue au niveau du serpentin intérieur ("freezer").

II.1 : Par analyse dimensionnelle, on peut dire que :

$$D_m = \frac{\delta m}{dt} = \mu.S.v$$

II.2 : En régime permanent, le débit massique est constant. Sachant que la section S est constante : $\mu.v = C^{te}$. La masse volumique est minimale avant la compression (état 1) donc la vitesse du fluide est maximale dans l'état 1 : $v_{max} = v_1$.

II.3 : Sachant que $\mu_1.v_1 = \mu_2.v_2$: $v_2 = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right).v_1$. La variation d'énergie cinétique massique au cours de la compression est :

$$(\Delta e_C)_{12} = \frac{1}{2}{v_2}^2 - \frac{1}{2}{v_1}^2 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 - 1\right).{v_1}^2$$

A.N. : $(\Delta e_C)_{12} = -0{,}5\ J.kg^{-1}$: on vérifie que $(\Delta e_C)_{12} \ll \Delta h_{12} \sim 50\ kJ.kg^{-1}$ (cf doc annexe).

II.4 : Les dimensions caractéristiques d'un réfrigérateur sont de l'ordre du mètre donc $\Delta(g.z) \sim 10\ J.kg^{-1}$. De la même manière, on peut faire l'hypothèse que : $\Delta(g.z) \ll \Delta h$. Dans la suite, nous appliquerons donc le premier principe pour les fluides en écoulement permanent sous la forme :

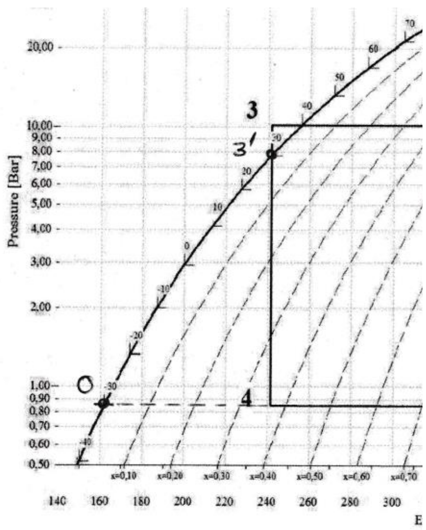
$$\Delta(h) = w_u + q$$

III.1 : Valeur numérique de la surchauffe : $T_1 - T_{sat}(P_{bp}) = -20 - (-30) = 10\ °C$

III.2 : Valeur numérique du *sous-refroidissement* : $T_3 - T_{sat}(P_{hp}) = 30 - (40) = -10\ °C$

III.3 : En appliquant le premier principe pour un fluide en écoulement permanent entre 3 → 4, sachant que l'évolution est adiabatique (parois calorifugées) et que le travail utile est nul (pas de pièces mobiles) on vérifie que la détente de Joule-Thomson est isenthalpique : $\Delta h_{34} = 0$.
III.4 : A gauche de la courbe de saturation, le fluide frigorigène est à l'état liquide donc sa variation d'enthalpie massique est donnée par : $\Delta h = c.\Delta T$. On en déduit que les isothermes sont confondues avec les isenthalpiques (verticales).

III.5 : L'enthalpie est une fonction d'état, donc sa variation ne dépend pas du chemin suivi pour aller de l'état $3'$ à l'état 4 (cf figure ci-contre) mais uniquement de l'état initial et de l'état final. Avec $\Delta h_{3'4} = \Delta h$ on peut donc poser que :



$$\Delta h = \Delta h_{3'0} + \Delta h_{04}$$

De l'état $3'$ à l'état 0 : le fluide est à l'état liquide donc :

$$\Delta h_{3'0} = c.(T_0 - T_{3'}) = c.(T_4 - T_3)$$
$$\text{avec } T_0 = T_4 \text{ et } T_{3'} = T_3$$

De l'état 0 à l'état 4 : le fluide subit une vaporisation partielle à température constante donc :

$$\Delta h_{04} = (x_4 - x_0).l_{vap}(T_4)$$

Avec $x_4 = x_{vap}$ et $x_0 = 0$ on établit que : $\Delta h_{04} = x_{vap}.l_{vap}(T_4)$

On vérifie que : $\Delta h = c.(T_4 - T_3) + x_{vap}.l_{vap}(T_4)$

III.6 : Mesures : $l_{vap}(T_4) = 380 - 160 = 220\ kJ.kg^{-1}$ et $x_{vap} = 0{,}35$. Sachant que l'évolution est isenthalpique :

$$T_4 - T_3 = -\frac{x_{vap}.l_{vap}(T_4)}{c}$$

A.N.: $T_4 - T_3 = -76\ °C$. En ordre de grandeur, nous retiendrons que la baisse de température est de l'ordre de quelques dizaines de degrés ce qui est en accord avec le diagramme sur lequel $T_4 - T_3 = -60\ °C$.

IV.1: Une évolution est isobare si la pression dans le fluide est constante et uniforme. Pour cela, il faut négliger la viscosité qui génère des gradients de pression.

IV.2: Pour qu'une évolution soit isentropique, il faut qu'elle soit adiabatique et réversible.

IV.3: Dans une machine frigorifique, l'énergie massique utile est celle qui est échangée avec la source froide, soit ici q_{41}. L'énergie massique coûteuse est celle que l'on paye, c.à.d. celle qui est utilisée pour alimenter le compresseur (énergie massique électrique), soit le travail utile w_u fourni de 1 → 2.

- De 4 → 1 : appliquons le premier principe pour un fluide en écoulement permanent :

$$\Delta h_{41} = q_{41}$$

Mesures : $q_{41} = \Delta h_{41} = h_1 - h_4 = 388 - 242 = 146\ kJ.kg^{-1}$. On vérifie que $q_{41} > 0$ comme annoncé à la question I.1.

- De $1 \rightarrow 2$: appliquons le premier principe pour un fluide en écoulement permanent, en notant que l'évolution est isentropique (donc adiabatique $q_{12} = 0$) : $\Delta h_{12} = w_u$.
  Mesures : $w_u = \Delta h_{12} = h_2 - h_1 = 440 - 388 = 52\ kJ.kg^{-1}$. On vérifie que $w_u > 0$.
- Efficacité de la machine frigorifique :

$$\boxed{e = \left|\frac{q_{41}}{w_u}\right| = 2{,}8}$$

IV.4: Soit $e_C = \left|\frac{Q_f}{W}\right| = \frac{Q_f}{W}$ le coefficient d'efficacité du cycle de Carnot. En appliquant le premier principe sur un cycle, on établit que : $Q_c + Q_f + W = 0$ donc $W = -(Q_c + Q_f)$.
Ainsi :

$$e_C = -\frac{Q_f}{Q_c + Q_f}$$

En appliquant le second principe sur un cycle réversible, on établit que : $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0$ soit $\frac{Q_c}{Q_f} = -\frac{T_c}{T_f}$ soit :

$$\boxed{e_C = \frac{T_f}{T_c - T_f}}$$

A.N.: $e_C = \frac{243}{313-243} = 3{,}5$ on vérifie que $e < e_C$ ce qui est en accord avec le théorème de Carnot.

Les phénomènes irréversibles dans le cycle réel limitent son efficacité. Sources d'irréversibilité : gradients de température et de pression, viscosité dans le fluide.

IV.5: Si l'évolution de $1 \rightarrow 2$ est adiabatique et irréversible, sachant que l'entropie créée est positive $\Delta s_{12} > 0$. Dans ces conditions, à pression P_{hp} égale, le point (2) est déplacé vers la droite ce qui augmente $\Delta h_{12} = w_u$ et diminue l'efficacité de la machine frigorifique.

IV.6: Le sous-refroidissement a pour effet de déplacer le point (3) (et donc le point (4)) vers la gauche ce qui augmente q_{41} et donc l'efficacité de la machine.