

## Problème 2 : Forces centrales

Un atome d'hydrogène dans son état fondamental peut absorber un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde  $\lambda = 21 \text{ cm}$ , c'est ce que l'on appelle usuellement la raie  $HI$  à 21 cm. Pour interpréter l'origine de cette raie, il faut mener une étude complète de l'atome d'hydrogène dans le cadre de la théorie de Dirac (mécanique quantique relativiste). Nous pouvons cependant comprendre qualitativement l'origine de la raie  $HI$  à partir des quelques notions simples évoquées dans ce qui suit.

### I. Étude classique de l'atome d'hydrogène

L'étude qui suit sera menée dans le référentiel  $R$  centré sur le proton, ce référentiel sera considéré comme galiléen. On désigne par  $r$  la distance entre le proton et l'électron et le moment cinétique de l'électron par rapport à l'origine dans le référentiel  $R$  sera noté  $\vec{L}$ .

**Q.1** Rappeler l'expression de la force électrostatique  $\vec{F}$  exercée par le proton sur l'électron.

**Q.2** En déduire l'expression de l'énergie potentielle électrostatique  $E_p$  de l'électron, en choisissant le zéro de cette énergie potentielle quand  $r \rightarrow \infty$ .

**Q.3** Montrer que le mouvement de l'électron est plan.

**Q.4** Déterminer l'énergie mécanique  $E$  de l'électron et la mettre sous la forme :

$$E = \frac{1}{2} m_e \cdot \dot{r}^2 + E_{peff}(r)$$

Où  $E_{peff}(r)$  est une fonction de  $r$  à expliciter en fonction des paramètres du problème et du moment cinétique orbital  $L$  de l'électron.

**Q.5** Donner l'allure de la représentation graphique de  $E_{peff}(r)$ . Analyser qualitativement le comportement du système pour différentes valeurs de l'énergie mécanique  $E$ .

**Q.6** A quelle condition une orbite circulaire est-elle possible ? Montrer que le rayon  $r_0$  de l'orbite circulaire a pour expression :

$$r_0 = \frac{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot L^2}{m_e \cdot e^2}$$

Etablissez l'expression de l'énergie mécanique  $E$  de l'électron décrivant une telle orbite en fonction de  $L$ ,  $e$ ,  $m_e$  et  $\epsilon_0$ .

**Q.7** Quelle serait la trajectoire de l'électron si  $L = 0$  ?

### II. Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

En 1913 Niels Bohr proposa un modèle « semi-classique » de l'atome d'hydrogène, dans ce modèle l'électron se trouve sur une orbite circulaire de rayon  $r$  et son moment cinétique orbital est quantifié par :

$$L = n \frac{h}{2 \cdot \pi} = n \cdot \hbar$$

où  $n$  est un nombre entier strictement positif et  $h$  la constante de Planck.

**Q.8** Montrer que les orbites sont quantifiées (pour cela, exprimer le rayon  $r$  de la trajectoire de l'électron en fonction des données et de  $n$ ). Déterminer la valeur du rayon  $a_0$  de la première orbite de Bohr (c.à.d. pour  $n = 1$ ).

**Q.9** En déduire que les niveaux d'énergie sont quantifiés. Donner la valeur (en eV) de l'énergie de l'état fondamental.

**Q.10** Rappeler l'expression de l'énergie cinétique moyenne de translation d'un atome en fonction de la température. A quelle température l'énergie d'agitation thermique d'un atome d'hydrogène est-elle comparable à son énergie d'ionisation ? Commenter.

**Q.11** L'atome d'hydrogène dans son état fondamental est susceptible d'absorber ou d'émettre un rayonnement de longueur d'onde proche de  $\lambda = 21 \text{ cm}$ . Le modèle de Bohr permet-il de comprendre l'origine de cette transition ?

### III. La structure hyperfine de l'atome d'hydrogène

Pour comprendre l'origine de la raie  $HI$  il faut étudier les interactions magnétiques entre le proton et l'électron. Afin d'en obtenir un ordre de grandeur, nous allons étudier ici l'interaction entre le dipôle magnétique associé au spin de l'électron et le dipôle magnétique associé au spin du proton, qui est appelée « interaction spin-spin ».

**Q.12** On rappelle que le moment magnétique d'une boucle de courant est donné par :  $\vec{M} = i \cdot \vec{S}$  avec  $i$  intensité du courant et  $\vec{S}$  vecteur surface orienté par la boucle de courant. Dans le cadre du modèle planétaire classique de l'atome d'hydrogène, montrer que le moment magnétique  $\vec{M}_0$  de l'électron sur une orbite circulaire est proportionnel à son moment cinétique orbital  $\vec{L}$  :  $\vec{M}_0 = \gamma_0 \cdot \vec{L}$  avec

$$\gamma_0 = -\frac{e}{2 \cdot m_e}$$

Le résultat précédent est encore vrai en théorie quantique : le moment magnétique d'une particule quantique est proportionnel à son moment cinétique. En outre, dans une théorie quantique relativiste chaque particule élémentaire possède un spin qui est interprété comme son moment cinétique intrinsèque. En généralisant le résultat précédent, elle possède aussi un moment magnétique intrinsèque (ou moment magnétique de spin) qui est proportionnel à son spin. Ainsi :

- L'électron, de spin  $\vec{S}_e$  possède un moment magnétique  $\vec{M}_e$  proportionnel à son spin :

$$\vec{M}_e = -g_s \left( \frac{e}{2 \cdot m_e} \right) \cdot \vec{S}_e$$

où  $g_s \approx 2,00$ .

- Le proton de masse  $m_p$  et de spin  $\vec{S}_p$  possède un moment magnétique de spin :

$$\vec{M}_p = g_p \left( \frac{e}{2 \cdot m_p} \right) \cdot \vec{S}_p$$

où  $g_p \approx 5,58$ . Les facteurs  $g_s$  et  $g_p$  sont appelés « facteurs de Landé » de l'électron et du proton.

- L'expression du champ magnétique créé en un point  $P$  (différent de  $O$ ) par un moment magnétique ponctuel  $\vec{M}$  placé en  $O$  est (champ magnétique de type dipolaire) :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi \cdot r^3} (2 \cdot M \cdot \cos \theta \cdot \vec{u}_r + M \cdot \sin \theta \cdot \vec{u}_\theta)$$

où  $r = \|\vec{OP}\|$  et  $\vec{u}_r = \frac{\vec{OP}}{OP}$

**Q.13** On suppose que l'électron est sur l'orbite fondamentale de modèle de Bohr et on admet que le moment magnétique de spin  $\vec{M}_p$  est orthogonal au plan de l'orbite. Montrer que le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par le proton sur l'électron est donné par :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 \cdot g_p \cdot e}{8 \cdot \pi \cdot m_p \cdot a_0^3} \vec{S}_p$$

On rappelle que :

- l'énergie potentielle magnétique d'un dipôle magnétique de moment magnétique  $\vec{M}$  placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  se met sous la forme  $E_{PM} = -\vec{M} \cdot \vec{B}$ .
- une propriété remarquable du spin de l'électron (ou du proton) est que sa projection suivant une direction quelconque ne peut prendre que deux valeurs  $\hbar/2$  ou  $-\hbar/2$ .

**Q.14** A partir des éléments précédents, montrer que l'état fondamental de l'hydrogène est formé de deux « sous-niveaux » d'énergie  $E_l$  et  $E_u = E_l + \Delta E$  (avec  $E_l < E_u$ ). On parle de « structure hyperfine » de l'état fondamental.

**Q.15** Donner l'expression, en fonction de  $g_s$ ,  $g_p$ ,  $e$ ,  $m_e$ ,  $m_p$  et  $a_0$  de la différence d'énergie  $\Delta E$  entre les deux sous-niveaux hyperfins à laquelle conduit ce modèle.

En fait, cette modélisation ne permet pas de déterminer correctement la structure hyperfine du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène.... Un calcul quantique de la différence d'énergie  $\Delta E$  entre ces deux sous-niveaux conduit à :

$$\Delta E = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{8}{3} g_s \cdot g_p \cdot \frac{m_e}{m_p} \left( \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m_e} \right)^2 \frac{1}{a_0^3}$$

**Q.16** Calculer la fréquence  $\nu_0$  et la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  du rayonnement électromagnétique absorbé ou émis lors d'une transition entre les deux sous-niveaux hyperfins. Commenter ce résultat. Dans quel domaine se situe cette raie ?

#### Données numériques

Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Constante de Planck réduite	$\hbar = 1,054 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1836 m_e$
Facteur de Landé de l'électron	$g_s = 2,00$
Facteur de Landé du proton	$g_p = 5,58$
Magnéton de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \times 10^{-24} \text{ J}\cdot\text{T}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
Constante de gravitation	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
Parsec	$1 \text{ pc} = 3,09 \times 10^{16} \text{ m}$
Masse du Soleil	$M_\odot = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$

### Problème 3 : Mécanique du solide

Un aspect fondamental de la gravitation est le principe d'équivalence. Introduit par Galilée au début de XVII<sup>ème</sup> siècle alors qu'il étudiait la chute des corps, il fut le point de départ du développement de la théorie de la gravitation. Un peu moins d'un siècle plus tard, Newton fut le premier à décrire l'interaction gravitationnelle par une formule. Il en déduisit la version la plus élémentaire du « principe d'équivalence faible » : la trajectoire d'un corps tombant en chute libre ne dépend ni de sa structure, ni de sa composition.

Si l'on sait aujourd'hui que la gravitation régit la dynamique des composantes de l'Univers (planètes, étoiles, galaxies,...), l'observation récente de l'expansion de l'Univers a conduit à se poser des questions fondamentales sur les théories de la gravitation classique. L'introduction dans la théorie cosmologique de l'énergie noire, qui serait la contribution énergétique majoritaire de l'Univers, permet d'expliquer certaines observations mais sa nature et ses propriétés restent principalement théoriques. Certaines extensions de la théorie de la gravitation suggèrent même l'existence d'une répulsion gravitationnelle entre matière et antimatière, nommé antigravité.

Cet exercice propose une description de l'expérience d'Eötvös ayant permis, dès la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, de valider une version réduite du principe d'équivalence avec une grande précision pour l'époque.

#### I. Introduction

1) Qu'appelle-t-on « principe d'inertie » en mécanique ? Énoncer le principe fondamental de la mécanique dans un référentiel galiléen. La grandeur caractéristique du mobile étudié dans cette expression porte, ici et dans la suite, le nom de *masse inerte*  $m_i$ .

2) Expliciter la force de gravitation entre deux points matériels. On introduira le paramétrage nécessaire sur un schéma. La grandeur caractéristique du mobile intervenant dans cette expression porte le nom de *masse grave* ou *masse pesante*.

Quantifier les déviations possibles au principe d'équivalence faible suppose que l'on puisse considérer les masses inertielle  $m_i$  et grave (ou pesante)  $m$  comme pouvant être différentes. Les premières mesures précises des écarts relatifs entre masses inertielle et grave, ont été obtenues par comparaison des périodes de deux pendules simples de masse et de composition différentes ; cette méthode, d'abord décrite par Galilée, a été menée par Newton (1686) ou encore Bessel (1826) et a conduit à des valeurs d'écarts relatifs compris entre  $10^{-3}$  et  $10^{-5}$ . L'invention du pendule de torsion permet d'augmenter fortement la sensibilité.

## II. Mesure du coefficient de torsion du pendule

L'expérience d'Eötvös utilise un pendule de torsion. Dans le dispositif simplifié, représenté sur la figure 1, deux sphères appelées  $S_1$  et  $S_2$ , homogènes de nature différentes et de même masse pesante  $m$  ont leurs centres d'inertie placés aux extrémités d'une barre rigide, de masse  $M$  et de longueur  $2L$ , suspendues en son centre à un fil de quartz très fin de constante de torsion  $C$ . On note  $m_{i1}$  et  $m_{i2}$  les masses inertielles respectives de  $S_1$  et  $S_2$ . La barre est libre de tourner autour de l'axe  $Oz$  en tordant plus ou moins le ruban de suspension. On suppose que la barre reste tout le temps de l'expérience dans le plan orthogonal à l'axe  $Oz$ .

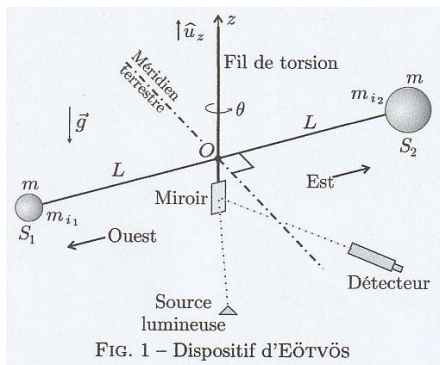


FIG. 1 - Dispositif d'EÖTVÖS

Le dispositif est placé de sorte qu'à l'équilibre, la barre soit normale au plan méridien à la latitude  $\lambda$ . Sa position est alors repérée par réflexion d'un faisceau lumineux sur un miroir plan, fixé au milieu de la barre, à l'aide d'une lunette. On note  $R$  le référentiel du laboratoire centré sur  $O$  et supposé galiléen dans cette sous-partie où l'objectif est la détermination de la constante de torsion  $C$  du pendule. On note  $J_0$  le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe vertical ( $Oz$ ) et  $J$  le moment d'inertie du système  $S = \{\text{barre} + \text{sphères}\}$  par rapport à ( $Oz$ ). On repère la position de la barre à l'instant  $t$  par l'angle de torsion  $\theta(t)$ . On fait tourner le système d'un angle  $\theta_m$  puis on le lâche sans vitesse

initiale. Le fil exerce alors sur la barre un couple de rappel dont le moment en  $O$  a pour intensité  $M_O = -C \cdot (\theta(t) - \theta_0)$ , l'angle  $\theta_0$  repère la position de la barre en l'absence de torsion.

3) Montrer que ce couple dérive d'une énergie potentielle que l'on déterminera. En déduire l'énergie potentielle  $E_{P,S}$  de  $S$  en fonction de  $C$  et  $\theta - \theta_0$ , on choisira  $E_{P,S}(\theta_0) = 0$ . Donner l'expression de l'énergie cinétique  $E_{C,S}$  du solide en fonction de  $J$  et de  $\omega = \dot{\theta}(t)$ . En déduire l'expression de l'énergie mécanique de  $S$  en fonction de  $C$ , de  $J$ ,  $\theta$ ,  $\theta_0$  et de  $\dot{\theta}$ .

4) On fait l'hypothèse que la puissance totale des forces de frottements peut se mettre sous la forme  $P_{frot} = -\alpha \cdot \dot{\theta}^2$  où  $\alpha$  est une constante positive. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par  $\theta(t)$  est :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J} \dot{\theta} + \frac{C}{J} \theta = \frac{C}{J} \theta_0$$

5) On observe des oscillations très faiblement amorties. Quelle est la condition satisfaite par les constantes  $J$ ,  $C$  et  $\alpha$  ? Préciser la forme de la solution sans déterminer l'expression exacte des deux constantes d'intégration. Quelle est la valeur  $\theta_\infty$  de  $\theta(t)$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Montrer que la pseudo-période  $T$  du mouvement est donnée par :

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \left( \frac{C}{J} - \frac{\alpha^2}{4J^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

6) Exprimer la pseudo-période  $T$  en fonction de la période propre  $T_0$  et de la constante  $\varepsilon = \frac{\alpha}{2\sqrt{J.C}}$ . Que devient cette expression dans l'hypothèse que  $\varepsilon \ll 1$ . On rappelle que pour  $x \ll 1$  :  $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + o(x)$  à l'ordre 1.

7) A quelle condition sur  $\varepsilon$ , l'erreur relative introduite par l'approximation  $T \sim T_0$  est-elle inférieure à 1 % ? Cette condition sera supposée vérifiée par la suite.

On note  $J_1$  les moments d'inertie, considérés égaux, de chacune des deux sphères par rapport à l'axe vertical passant par leurs centres respectifs. On admettra que si le principe d'équivalence faible s'applique alors  $J = J_0 + 2 \cdot J_1 + 2 \cdot m \cdot L^2$ . On mesure la période  $T$  des oscillations pour différentes valeurs de la longueur  $L$  avec des sphères de masse pesante  $m = 0,2 \text{ kg}$ . Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

$L$ [m]	$6,0 \cdot 10^{-2}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$	$8,0 \cdot 10^{-2}$
$T$ [s]	436	509	581

8) En utilisant les résultats précédents, écrire la relation entre  $T^2, L^2, J_0, J_1, m$  et  $C$ . A partir des résultats de mesure donner une estimation de la valeur de la constante de torsion  $C$ . Compte tenu des ordres de grandeurs des différents termes intervenant dans l'expression de  $T$  montrer que l'on peut écrire :

$$m \approx \frac{C}{8 \cdot \pi^2} \frac{T^2}{L^2}$$

### III. Résultats et précision de l'expérience

Dans cette sous-partie le référentiel  $R$  du laboratoire centré sur  $O$  n'est plus galiléen et l'on prend en compte les éventuels effets de la rotation de la terre sur les masses inertes  $m_{i1}$  et  $m_{i2}$  à priori différentes des deux sphères.

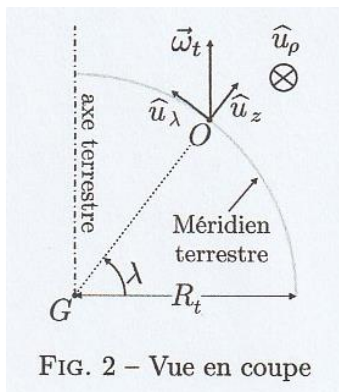


FIG. 2 - Vue en coupe

La terre est supposée en rotation uniforme à la vitesse  $\vec{\omega}_t$  autour de l'axe terrestre et le point  $O$  se trouve à la latitude  $\lambda$ . Une vue en coupe de la situation est représentée sur la figure 2.

L'ensemble constitué du pendule et du système optique est solidaire d'une plateforme. Lors d'une première mesure dans la configuration de la figure 1, on relève une valeur  $\theta_{\infty 1}$  pour l'équilibre du pendule. On fait alors tourner la plateforme d'un angle  $\pi$  afin d'inverser les positions des deux sphères, et l'on répète la mesure. On relève une valeur  $\theta_{\infty 2}$  pour l'équilibre du pendule dans cette nouvelle configuration.

Dans la première configuration, on montre que les forces d'inertie d'entraînement exercent respectivement les moments  $M_{Oi1}$  et  $M_{Oi2}$  sur le pendule :

$$\begin{cases} M_{Oi1} = m_{i1} \cdot \omega_t^2 \cdot L \cdot (R_T \cdot \cos \lambda) \cdot \sin \lambda \\ M_{Oi2} = -m_{i2} \cdot \omega_t^2 \cdot L \cdot (R_T \cdot \cos \lambda) \cdot \sin \lambda \end{cases}$$

9) En exploitant le théorème du moment cinétique à l'équilibre, montrer que :

$$\Delta\theta = \theta_{\infty 1} - \theta_{\infty 2} = \frac{R_T \cdot \omega_t^2 \cdot L \cdot \sin 2 \cdot \lambda \cdot (m_{i1} - m_{i2})}{C}$$

10) La lunette utilisée pour la mesure permet de détecter une déviation du faisceau lumineux de l'ordre de  $0,1 \text{ mm}$  à  $2,0 \text{ m}$  de distance. En utilisant l'expression de  $m$  trouvée à la question 8), déterminer la précision de la méthode en estimant le rapport  $\delta_m = \frac{|m_{i1} - m_{i2}|}{m}$ . On donne  $\lambda = 45^\circ$  et  $L = 6,0 \text{ cm}$ .

11) La déviation observée est nulle. Que déduire de ce résultat ?