T.D. n° 5 Mécanique

Thème : Système soumis à une force centrale

A.1 : Modèle de BOHR de l'atome d'hydrogène

Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron de charge $q = -e$ et de masse m tourne autour du proton sur une orbite circulaire de rayon r à la vitesse v.

1) Etablir l'expression de l'énergie potentielle E_P de l'électron.

2) Exprimer son énergie cinétique E_C et son énergie mécanique E_m en fonction de r.

3) L'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental, notée E_1 est de 13,6 eV. On donne $m = 9{,}1.10^{-31}\ kg$, $e = 1{,}6.10^{-19}\ C$ et $\varepsilon_0 = 8{,}8.10^{-12}\ SI$. Calculer le rayon r_1 de l'électron dans son état fondamental.

4) Calculer la vitesse v_1 et la fréquence f_1 correspondantes. On note c la vitesse de la lumière. Exprimer le rapport $\alpha = \frac{v_1}{c}$ sous la forme 1/N. Commentaire.

5) En assimilant l'orbite de l'électron à une spire parcourue par un courant continu, calculer l'intensité i_1 de ce courant.

6) Selon Louis de BROGLIE, la longueur d'onde de l'électron, de quantité de mouvement p est donnée par $\lambda = \frac{h}{p}$ avec $h = 6{,}62.10^{-34}\ J.s$. Calculer λ_1 et exprimer λ_1 en fonction de π et r_1. On reconnait la "règle d'accord des phases" de Louis de Broglie.

A.2 : Quelques caractéristiques de la planète Mars

1) Dans tout cet exercice, les orbites sont supposées circulaires. Sachant que la période de révolution de Mars autour du Soleil est $T_M = 1{,}9$ ans, calculer sa distance au Soleil.

2) Mars est supposée être dans le plan de l'écliptique. On dit que la Terre et Mars sont en opposition lorsque le Soleil, la Terre et Mars sont approximativement alignées dans cet ordre . On note T_T la période de rotation de la Terre autour du Soleil et on montre que la période du phénomène d'opposition est $T = \frac{T_M . T_T}{T_M - T_T}$ Calculer la période de l'opposition de Mars ?

3) Lors de l'opposition, on voit Mars sous un diamètre apparent de 18,2 secondes d'arc. Calculer son diamètre en kilomètre.

4) On connaît deux satellites naturels de Mars. L'un d'eux, Deimos, gravite à r = 24 000 km de la planète, sur une orbite sensiblement circulaire, avec une période T = 30 h 20 mn. Calculer la masse de Mars ainsi que sa masse volumique moyenne.

5) Calculer le rapport masse de Mars/ masse de la Terre.

On donne : distance Terre-Soleil : 150 millions de kilomètres, $G = 6{,}67.10^{-11}$ S.I.; $g_0 = 9{,}8\ m/s^2$
rayon terrestre : $R_T = 6{,}4.10^6$ m

A.3 : Satellite et frottement

1) Un satellite est placé sur une orbite de rayon r_0 contenue dans le plan équatorial. Déterminer les énergies potentielles E_P , cinétique E_C et totale E_0.

2)L'altitude du satellite étant peu élevée, il subit les frottements des hautes couches atmosphériques. Son énergie totale diminue alors avec le temps suivant la loi : $E_T = E_{T0}(1 + \alpha t)$ avec α positif et E_{T0} négatif. On suppose que la trajectoire reste circulaire. Déterminer, en fonction du temps, le rayon r de la trajectoire, et la vitesse v du satellite. En comparant les énergies, expliquer pourquoi la vitesse du satellite augmente alors qu'il est freiné par l'atmosphère.

A.4 : Vitesses cosmiques

La Terre est assimilée à une sphère de centre O, de rayon R et de masse M_T. Le référentiel géocentrique est supposé galiléen. On note G la constante gravitationnelle et on donne $G.M_T = 3{,}99.10^{14}\ m^3.s^{-2}$.

1) On appelle première vitesse cosmique, notée v_C la vitesse d'un satellite en orbite circulaire basse. Dans ces conditions, on néglige l'altitude du satellite devant le rayon terrestre. Exprimer la première vitesse cosmique en fonction de G, M_T et de R. On donne $R = 6{,}40.10^3\ km$, calculer v_C.
2) Calculer l'énergie mécanique du satellite en orbite circulaire basse.
3) On note g_0 le champ de pesanteur au voisinage de la surface terrestre. Rappeler l'expression de g_0 en fonction de G, M_T et de R puis exprimer v_C en fonction de g_0 et de R.
4) Est-il indifférent de placer un satellite en orbite, selon que le lancement est dirigé vers l'est ou vers l'ouest ?
5) Un satellite est placé en orbite géostationnaire. Rappeler les caractéristiques de sa trajectoire. On note R_G le rayon de sa trajectoire. Exprimer R_G en fonction de sa période de rotation T, de G et de M_T. Calculer R_G.
6) On appelle deuxième vitesse cosmique, notée v_L la vitesse de libération d'un satellite au voisinage de la surface terrestre. Exprimer v_L en fonction de G, M_T et de R puis exprimer v_L en fonction de v_C.
7) Lancement d'une sonde spatiale : qu'un satellite quitte le voisinage immédiat de notre planète ne présente pas vraiment d'intérêt. Par contre, nous pouvons imaginer le lancement d'une sonde spatiale capable d'exploration éloignée. Ainsi, les sondes Voyager 1 et Voyager 2 ont survolé Jupiter puis Saturne... avant de quitter le système solaire quelque cinq années après leur lancement. Déterminer la troisième vitesse cosmique, notée v_{so} qui correspond à la vitesse à partir de laquelle une sonde peut se libérer de l'attraction du Soleil. Le référentiel de Copernic est supposé galiléen. Donnée : distance Terre-Soleil : $d = 150.10^6\ km$.

B.1 : Mouvement d'un satellite
1) Un satellite terrestre a son périgée à h_P =350 km d'altitude, et une période de 5843 s. Calculer le demi-grand axe a de sa trajectoire (on donne $R_T = 6{,}40.10^6$ m et $g_0 = 9{,}81$ m/s^2)
2) Calculer l'altitude h_A du satellite à son apogée.

B.2 : Comète de HALLEY
La période de la comète de HALLEY est 76,0 années. La distance du périhélie au Soleil est r_P = 0,590 UA (unité astronomique : 1 $u.a.$: demi-grand axe de l'orbite terrestre)
1) Calculer le demi-grand axe de l'orbite.
2) Calculer les vitesses maximale et minimale de la comète dans le référentiel de COPERNIC. Données : $G = 6{,}67.10^{-11}\ SI$, masse du Soleil $M_S = 2{,}00.10^{30}\ kg$, $1\ u.a. = 150.10^6\ km$.

B.3 : Etude d'un satellite artificiel de la Terre
Un satellite artificiel de la Terre, de masse m = 100 kg, dont l'énergie totale $E_m = -1{,}70.10^9\ J$ (l'origine des énergies potentielles étant prise à une distance infinie de la Terre) passe au cours de sa rotation à une minimale $r_P = 7000\ km$ du centre de la Terre.
1) Sachant que le rayon terrestre a pour valeur R_T = 6 400 km et que la pesanteur au niveau du sol est g_0 = 9,81 m/s^2, déterminer le demi-grand-axe a de l'orbite du satellite.
2) Déterminer la vitesse du satellite v_P au périgée et déduire la valeur de son moment cinétique au point O, centre de la Terre, et celle de sa vitesse aréolaire.
3) Calculer la période T de révolution du satellite autour de la Terre.
4) De quelle quantité faut-il modifier la vitesse au périgée pour que la trajectoire devienne circulaire ? Quelle sera alors la période de révolution ?

B.4: Vitesse d'un satellite à son périgée
Lors de son lancement, le satellite d'observation Hipparcos est resté sur son orbite de transfert à cause d'un problème technique. On l'assimile à un point matériel M de masse $m = 1{,}10\ t$. L'orbite de transfert est elliptique et la distance Terre-satellite varie entre $d_P = 200\ km$ au périgée et $d_A = 35{,}9.10^3\ km$ à l'apogée. On rappelle que le périgée est le point de l'orbite le plus proche de la Terre et que l'apogée est le point le plus éloigné. On mesure la vitesse du satellite à son apogée : $v_A = 3{,}50.10^2\ m.s^{-1}$.

1) Faire un schéma de la trajectoire en faisant apparaitre la position O du centre de la Terre, l'apogée A et le périgée P.
2) Déterminer le demi-grand axe a de la trajectoire.
3) En déduire l'énergie mécanique et la période du satellite.
4) On note v_A et v_P les vitesses du satellite en A et en P. Exprimer le module du moment cinétique calculé au point O du satellite à son apogée puis à son périgée.
5) En déduire la vitesse du satellite à son périgée.
Données : Rayon terrestre : $R_T = 6{,}40.10^3\ km$, masse de la Terre : $M_T = 5{,}97.10^{24}\ kg$, constante gravitationnelle : $G = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$.

B.5 : Orbite de transfert
La Terre est supposée de symétrie sphérique, de centre C, de rayon r_0. On note g_0 l'intensité du champ de pesanteur terrestre au niveau du sol. On donne $r_0 = 6400\ km$ et $g_0 = 9{,}8\ m.s^{-2}$.
1) Un satellite de masse m décrit une trajectoire circulaire rasante de rayon r_0. Quelles sont les expressions de la vitesse v_0 et de la période T_0 du satellite ? Calculer numériquement v_0 et T_0.
2) Un satellite géostationnaire décrit une trajectoire circulaire située dans le plan équatorial et semble fixe pour un observateur terrestre. Déterminer le rayon r_1 de l'orbite d'un satellite géostationnaire. Calculer la vitesse v_1 de ce satellite.
3) On veut faire passer un satellite de l'orbite circulaire rasante de rayon $r_0 = CP$ à l'orbite circulaire de rayon $r_1 = CA$. Un moteur auxiliaire permet de modifier la vitesse du satellite aux point P et A. Le satellite parcourt alors une demi-ellipse dite de transfert de périgée P et d'apogée A.

- Déterminer littéralement puis numériquement les vitesses v_0' et v_1' du satellite en P et A sur sa trajectoire elliptique.
- Calculer la durée du transfert de P à A.

B.6 : Intersection d'orbites
La Terre est en orbite circulaire de rayon R_0 et de vitesse v_0 autour du Soleil de masse M. Une comète de masse m possède une trajectoire dans le même plan que la trajectoire terrestre de périhélie caractérisé par $r_P = \frac{R_0}{2}$ et $v_P = 2.v_0$. On note G la constante de gravitation.
1) Exprimer v_0 en fonction de R_0, M et G.
2) Calculer v_0 pour $G = 6{,}7.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$, $R = 150.10^6\ km$ et $M = 2{,}0.10^{30}\ kg$.
3) Quelle est la nature de la trajectoire de la comète ? Faire un schéma.

B.7: Vaisseau spatial dans le champ newtonien (Extrait CC Centrale-Supelec)
On considère un vaisseau supposé ponctuel de masse m, mobile par rapport à un astre de masse M, de centre O et de rayon R. Le champ de gravitation de cet astre est à symétrie sphérique. La constante de gravitation est notée G. La distance entre le vaisseau et le centre de l'astre est r avec $r > R$. On se placera dans le référentiel lié à l'astre. Ce référentiel sera supposé galiléen. Sauf mention contraire, le moteur fusée est éteint, c'est à dire que le vaisseau est en vol balistique.
1) Montrer que le moment cinétique $\vec{L}(O)$ du vaisseau est une constante du mouvement.
2) Cette constance de $\vec{L}(O)$ a deux conséquences sur la trajectoire du vaisseau : lesquelles ?
3) Déterminer le champ gravitationnel $\vec{g}(P)$ créé par l'astre en un point P extérieur à l'astre à la distance r de O en fonction de G, M, r et du vecteur $\overrightarrow{OP}$.
4) En déduire l'énergie potentielle du vaisseau en fonction de G, Met r en la choisissant nulle à l'infini.
5) Dans le cas d'une orbite circulaire de rayon r_0, exprimer l'énergie mécanique E_m du vaisseau et sa période de révolution $T_{rév.}$ en fonction de G, M, r_0 et, si nécessaire, de m. Commenter le signe de E_m.
6) Dans le cas où l'astre est notre Terre, on considère une masse $1\ kg$ initialement au repos à la surface de la Terre de rayon $R_T = 6400\ km$, puis placée sur une orbite circulaire de rayon $r_0 = 7000\ km$. En prenant g_0 l'intensité du champ gravitationnel terrestre au niveau du sol à $10\ m.s^{-2}$,

évaluer numériquement la différence d'énergie mécanique ΔE_m entre ces deux états. On négligera la vitesse initiale de la masse dans le référentiel géocentrique lié à la rotation de la Terre.
7) 1 "kilowatt-heure" électrique revient environ à $0{,}15$ €; en déduire numériquement le coût théorique de la satellisation d'un kg de charge utile. Le coût réel est de l'ordre de 1000 € par kg. Commenter ces valeurs.
8) Supposons qu'à la distance r_0 du centre de l'astre, la norme v_0 de la vitesse d'un vaisseau soit la même que pour une orbite circulaire, mais que l'angle α entre le support du vecteur vitesse et la tangente au cercle de centre O et de rayon r_0 appartienne à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Déterminer en fonction de r_0 et α les caractéristiques de la trajectoire de ce vaisseau : sa nature, le demi-grand axe a, les distances r_A du centre O à l'apogée et r_P du centre au périgée.
9) Le vaisseau est initialement sur une orbite circulaire de rayon r_0 décrite à la vitesse v_0. On allume le moteur pendant un temps court, de sorte que la vitesse varie mais pas la distance au centre de l'astre. Evaluer la vitesse v_1 qu'il faut communiquer au vaisseau pour qu'il échappe au champ gravitationnel de l'astre en fonction de G, M et r_0.
10) Le commandant de bord augmente brusquement la vitesse du vaisseau, la faisant passer à $5.v_0$ en un temps bref. Evaluer la vitesse du vaisseau à l'infini, en fonction de v_0.

C.1: Modèle semi-quantique de Bohr
Avant de s'intéresser à la structure de l'atome, on avait déterminé que chaque atome (sous le coup d'une excitation) était capable de rayonner une onde électromagnétique (parfois appartenant au spectre visible). Pour l'atome d'hydrogène, les longueurs d'onde caractéristiques de ces rayonnements vérifient la loi expérimentale de Balmer-Rydberg :

$$\frac{1}{\lambda_{np}} = R_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right) \qquad (1)$$

Où n et p sont des entiers ($n < p$) et R_H est la constante de Rydberg. On souhaite retrouver théoriquement ce résultat en s'intéressant à l'atome d'hydrogène.
1) Dans le modèle de Rutherford, il est possible d'envisager une trajectoire circulaire de rayon R de l'électron autour du noyau fixe. Calculer la vitesse v correspondant à cette orbite et en déduire la période T de rotation de l'électron sur cette orbite en fonction de ε_0, m_e, e et R.
2) Montrer que la force électrique ressentie par l'électron dérive d'une énergie potentielle que l'on explicitera. En déduire l'énergie mécanique E sur l'orbite circulaire de rayon R.
3) On numérote par deux entiers n et p deux orbites circulaires distinctes d'énergies mécaniques respectives E_n et E_p. On note L_n et L_p les moments cinétiques respectifs par rapport au noyau.
Montrer que $E_p - E_n = Y\left(\frac{1}{L_n^2} - \frac{1}{L_p^2}\right)$ (2) ; Y est une constante que l'on explicitera en fonction de e, ε_0 et m_e.
4) En tenant compte de résultats connus en 1913, Bohr a pu poser la relation bien connue aujourd'hui $E_p - E_n = h\nu_{np}$ entre énergie et fréquence. De plus, il a posé la condition de quantification du moment cinétique suivante pour les orbites circulaires $L_n = n.\hbar$ (où $\hbar = \frac{h}{2.\pi}$ est la constante réduite de Planck). Montrer que ces deux relations permettent de retrouver l'égalité (1). En déduire une expression de la constante de Rydberg R_H en fonction de ε_0, m_e, e, c et $\hbar$. Faire l'application numérique.

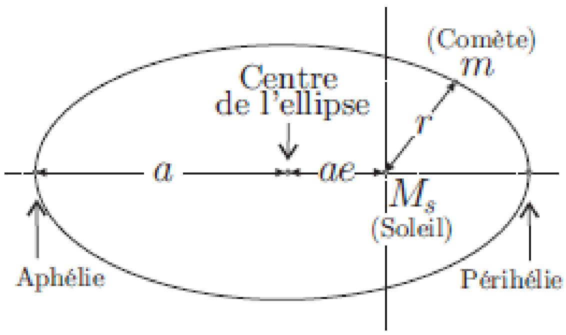
Problème : La mission spatiale Rosetta
Ce sujet propose de revenir sur l'exploit réalisé par l'Agence Spatiale Européenne lors de l'accomplissement de la mission Rosetta. Cette mission consistait à rejoindre la comète $67\,P$ Churyomov-Gerasimenko (rebaptisée Churry à cette occasion) sur son orbite à plusieurs centaines de millions de kilomètres de la Terre. Une fois sur place la sonde devait étudier l'environnement de Churry en se satellisant autour d'elle. Une fois ce premier exploit réalisé le 6 aout 2014, la sonde

Rosetta devait envoyer un robot, nommé Philae, pour qu'il se pose sur la comète et réalise une étude in situ. Ce robot a réussi à se poser sur la comète le 12 novembre 2014, il a ensuite réalisé sa mission de façon quasi-nominale pendant 3 jours dans des conditions physiques extrêmes. Il a ensuite transmis les données recueillies vers Rosetta toujours en orbite autour de Churry. Rosetta les a ensuite envoyées vers la Terre où nous les avons reçues quelques dizaines de minutes plus tard.
La réalisation complète de cette mission aurait pu être présentée comme un exploit retentissant de la conquête spatiale, n'ayant rien à envier aux premiers pas de l'homme sur la Lune. Cependant, le fait que Philae se soit posé de façon peu stable, le traitement médiatique de ce genre d'évènement, et bien d'autres facteurs plus complexes, n'ont pas permis de se rendre compte de l'incroyable performance scientifique réalisée à l'occasion de cette mission. Ce sujet revient sur l'étude des propriétés orbitales de Churry.

1)-a- En appliquant le principe fondamental de la mécanique à une comète de masse m en orbite circulaire de rayon R autour du Soleil, retrouver la $3^{ème}$ loi de Kepler.

1)-b- Dans le cas d'une orbite elliptique, on peut démontrer que cette relation se généralise en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe a de l'ellipse (voir figure ci-dessous). En déduire la relation entre le demi-grand axe a de l'ellipse parcourue par la Comète, la période T de la comète, la masse du Soleil M_S et la constante de gravitation G.

1)-c- Déterminer la valeur numérique de la période T de la comète Churry. On donne $a = 5{,}3.10^{11}\ m$.



2) On ne suppose plus la trajectoire circulaire, et on note $\vec{r}$ le vecteur position de la comète dans le référentiel héliocentrique et $r = \|\vec{r}\|$. Donner l'expression du moment cinétique $\vec{L_S}$ de la comète par rapport au Soleil. Justifier que le moment cinétique est constant puis en déduire que la trajectoire de la comète est contenue dans un plan que l'on précisera. Déterminer l'expression de $C = \frac{\|\vec{L_S}\|}{m}$ en fonction des coordonnées polaires (r, θ) de la comète dans ce plan.

3) Etablir l'expression de la fonction énergie potentielle d'interaction gravitationnelle $E_P(r)$. Donner l'expression de l'énergie cinétique de la comète en fonction de r, θ et de leurs dérivées. Etablir la relation $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_m - E_{eff}(r)$ où E_m est l'énergie mécanique supposée négative de la comète et $E_{eff}(r)$ son énergie potentielle effective que l'on exprimera en fonction de C, G, m, M_S et r. Tracer la représentation graphique de $E_{eff}(r)$ et positionner sur ce graphique E_m, les distances au Soleil r_{max} et r_{min}de l'aphélie et du périhélie.

4) Montrer qu'il existe une trajectoire circulaire correspondant à $r = r_{min} = r_{max} = r_0$ et $E_m = E_0$. Déterminer l'expression de r_0 en fonction de C, G et M_S puis en déduire celle de E_0 en fonction de C, G, m et M_S. On note respectivement $E_c(r)$ et $E_p(r)$ les énergies cinétique et potentielle de la comète à la distance r du Soleil, déterminer la relation entre $E_c(r_0)$ et $E_p(r_0)$.

5) Etablir l'équation du second degré en r dont r_{min} et r_{max} sont solutions, qui permet de déduire l'expression de E_m en fonction de G, m, M_S et a. Résoudre l'équation et déterminer la relation liant E_m au demi-grand axe a. En vous aidant de la figure, exprimez l'excentricité e de l'ellipse en fonction de r_{max}, de r_{min} et de a. En déduire que : $1 - e^2 = -\frac{m.C^2}{2.a^2.E_m}$.

6) Quelle est la propriété de la vitesse aréolaire de la comète, rapport de la surface balayée par le rayon vecteur sur le temps mis pour la parcourir ? Sachant que l'aire d'une ellipse d'excentricité e et de demi-grand axe a est $S = \pi.a^2.\sqrt{1-e^2}$, déterminer la relation entre la période de la comète et le demi-grand axe de l'ellipse. Commenter le résultat obtenu. Comment se nomme cette loi ?

Données :

- Constante gravitationnelle : $G = 6{,}7.10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$.
- Masse du Soleil : $M_S = 2{,}0.10^{30}\ kg$
- Unité astronomique : $1\ u.a. = 1{,}5.10^{11}\ m$

Caractéristiques de Churry :

- r_{max} : aphélie, distance au plus loin du Soleil : $5{,}7\ u.a$
- r_{min} : périhélie, distance au plus près du Soleil : $1{,}3\ u.a$

Solutions : **A.1 :** 1) $E_P = -\frac{e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.r}$ 2) Trajectoire circulaire et uniforme : $E_m = -E_C = \frac{E_P}{2} = -\frac{e^2}{8.\pi.\varepsilon_0.r}$ 3) $r_1 = -\frac{e^2}{8.\pi.\varepsilon_0.E_1} = 53{,}1\ pm$ 4) $v_1 = 2{,}2.10^6\ m.s^{-1}$ et $f_1 = 6{,}6.10^{15}\ Hz$, $\alpha = \frac{v_1}{c} = \frac{1}{N}$ avec $N = 136$: la vitesse de l'électron est relativement proche de la vitesse de la lumière et ce modèle mériterait une correction relativiste 5) $i_1 = \frac{e}{T} = e.f_1 = 1{,}1\ mA$ 6) $\lambda_1 = 3{,}3.10^{-10}\ m$, on constate que $\lambda_1 = 2.\pi.r_1$: règle d'accord des phases de Louis de Broglie **A.2 :** 1) $r_M = 1{,}53.r_T = 230.10^6$ km 2) $T_0 = \frac{T_M.T_T}{T_M - T_T} = 2{,}1$ ans 3) $d_M = 0{,}55.d_T = 7015\ km$ 4) $M_M = 0{,}11.M_T = 6{,}9.10^{23}$ kg ; $\rho_M = 3{,}8.10^3\ kg/m^3$ 5) $M_M = 0{,}11.M_T$ **A.3 :** 1) $E_0 = -\frac{G.M.m_S}{2.r_0} = \frac{E_P}{2} = -E_C$ 2) $r(t) = -\frac{G.M.m_S}{2.E_{T0}.(1+\alpha.t)}$; $v(t) = \sqrt{-\frac{2.E_{T0}}{m}(1+\alpha.t)}$: paradoxe… la vitesse du satellite augmente malgré les frottements **A.4 :** 1) $v_C = \sqrt{\frac{G.M_T}{R}} = 7{,}90\ km/s$ 2) $E_m = -\frac{1}{2}m.v_S{}^2 = -3{,}1.10^9 J$ 3) $g_0 = \frac{G.M_T}{R^2}$ et $v_C = \sqrt{g_0.R}$ 4) Lancement moins couteux vers l'est 5) $R_G = \left(\frac{G.M_T.T^2}{4.\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 42{,}2.10^3 km$ 6) $v_L = \sqrt{\frac{2.G.M_T}{R}} = \sqrt{2}.v_C = 11{,}2\ km/s$ 7) v_{SO}=$\sqrt{2}.v_T$ avec v_T vitesse de la Terre (assimilée à un point matériel) autour du Soleil, $v_T = 30\ km/s$ donc v_{SO}= 42,2 Km/s : vitesse estimée dans le référentiel de Copernic et non dans le référentiel géocentrique **B.1 :** 1) $a = \left(\frac{g_0.R_T{}^2.T^2}{4.\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 7028\ km$ 2) $h_A = r_A - R_T = 910\ km$ **B.2 :** 1) $a_H = a_T.\left(\frac{T_H}{T_T}\right)^{\frac{2}{3}} = 17{,}9\ U.A.$ 2) $v_P = \sqrt{G.M_S.\left(\frac{2}{r_P} - \frac{1}{a_H}\right)} = 54{,}5\ km/s$ et $v_A = \sqrt{G.M_S.\left(\frac{2}{r_A} - \frac{1}{a_H}\right)} = 870\ m/s$ **B.3 :** 1) $E_m = -\frac{G.M_T.m}{2.a} = -\frac{g_0.R_T{}^2.m}{2.a}$ donc $a = -\frac{g_0.R_T{}^2.m}{2.E_m} = 11{,}8.10^3\ km$ 2) $v_P = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E_m + \frac{g_0.R_T{}^2.m}{r_P}\right)} = 9\ km/s$; moment cinétique $L = m.r_P.v_P = 6{,}3.10^{12} kg.m^2/s$; vitesse aréolaire $v_{ar} = \frac{C}{2} = \frac{L}{2.m} = 3{,}1.10^{10}\ m^2/s$ 3) $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M_T}$ donc $T = 3h\ 32\ mn$ 4) pour que la trajectoire soit circulaire il faut que $v_0 = \sqrt{\frac{G.M_T}{r_0}} = 7{,}6\ km/s$. Sachant que $v_P = 9\ km/s$, $\Delta v = 1{,}4\ km/s$. La période du satellite serait alors $T_0 = \sqrt{\frac{4.\pi^2.r_0{}^3}{G.M_T}} = 1\ h\ 37mn$ **B.4:** 2) $2.a = 2.R_T + d_A + d_P$ donc $a = 24{,}4.10^3\ km$ 3) $E_m = -\frac{G.M_T.m}{2.a} = -8{,}98.10^9\ J$ 4) $L(O) = m.r_P.v_P = m.r_A.v_A$ 5) $v_P = \frac{r_A.v_A}{r_P} = 2{,}24\ km.s^{-1}$ **B.5:**

1) $v_0 = \sqrt{\frac{G.M_T}{r_0}} = \sqrt{g_0.r_0}$ avec $g_0 = \frac{G.M_T}{{r_0}^2}$ et $T_0 = 2.\pi\sqrt{\frac{r_0}{g_0}}$; A.N.: $v_0 = 7{,}9.10^3\ m.s^{-1}$ et $T_0 = 5{,}1.10^3\ s$ 2) $r_1 = \left(\frac{G.M_T.{T_1}^2}{4.\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{g_0.{r_0}^2.{T_1}^2}{4.\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 42.10^3\ km$; $v_1 = \sqrt{\frac{g_0.{r_0}^2}{r_1}} = 3{,}1.10^3\ m.s^{-1}$ 3) Avec $a = \frac{r_0+r_1}{2} = 24.10^3\ km$ et $E_m = -\frac{G.M_T.m}{2.a} = \frac{1}{2}m.v^2 - \frac{G.M_T.m}{r}$; $v'_0 = \sqrt{g_0.{r_0}^2.\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right)} = 10\ km.s^{-1}$ et $v'_1 = \sqrt{g_0.{r_0}^2.\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a}\right)} = 1{,}5.10^3\ km.s^{-1}$. Durée du transfert : $t_{PA} = \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{\pi^2.a^3}{g_0.{r_0}^2}} = 18.10^3\ s$ **B.6:** 1) $v_0 = \sqrt{\frac{G.M}{R_0}}$ 2) $v_0 = 30\ km.s^{-1}$ 3) $E_m = \frac{1}{2}m.{v_P}^2 - \frac{G.M}{r_P} = 0$: trajectoire parabolique **B.7:** 1) Le système est soumis à une force centrale donc $\vec{L}(O) = \overrightarrow{cte}$ 2) Le mouvement du vaisseau est plan (le plan du mouvement passe par O) et satisfait la loi des aires 3) $\vec{g}(P) = -\frac{G.M}{r^2}\vec{u}_r$ 4) Travail élémentaire de la force gravitationnelle : $\delta w = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = -dE_P$. En explicitant : $\frac{dE_P}{dr} = \frac{G.M.m}{r^2}$ En primitivant : $E_P(r) = -\frac{G.M.m}{r} + A$. Si on pose que $E_P(\infty) = A = 0$ alors $E_P(r) = -\frac{G.M.m}{r}$ 5) Trajectoire circulaire : $E_m = -\frac{G.M.m}{2.r_0}$; $E_m < 0$: état lié. Période de révolution : $T_{rév} = \sqrt{\frac{4.\pi^2.{r_0}^3}{G.M}}$ 6) $\Delta E_m = m.g_0.R_T.\left(1 - \frac{R_T}{2.r_0}\right)$. A.N.: $\Delta E_m = 35\ MJ$ 7) $1\ kilowattheure = 3{,}6\ MJ$ le coût théorique de satellisation d'un kg de charge utile est donc de 1,5 euros 8) L'énergie mécanique du vaisseau est négative. Il est dans un état lié. Pour $\alpha \neq 0$, sa trajectoire est elliptique. Energie mécanique : $E_m = -\frac{G.M.m}{2.r_0} = -\frac{G.M.m}{2.a}$ donc $a = r_0$. Pour déterminer r_A et r_P, exprimons l'énergie mécanique sachant qu'en ces points la vitesse est rigoureusement orthoradiale (c.à.d. $\dot{r} = 0$) : $E_m = -\frac{G.M.m}{2.r_0} = \frac{1}{2}m\left(r.\dot{\theta}\right)^2 - \frac{G.M.m}{r}$. En explicitant le moment cinétique au point de lancement : $\vec{L}(O) = m.r_0.v_0.\cos\alpha.\vec{u}_z = m.r^2.\dot{\theta}.\vec{u}_z$ soit $\left(r.\dot{\theta}\right)^2 = \frac{(r_0.v_0.\cos\alpha)^2}{r^2}$ Soit : $E_m = -\frac{G.M.m}{2.r_0} = \frac{1}{2}m\frac{(r_0.v_0.\cos\alpha)^2}{r^2} - \frac{G.M.m}{r}$ ce qui nous conduit à un polynôme du second ordre : $r^2 - 2.r.r_0 + {r_0}^2.(\cos\alpha)^2 = 0$ dont les solutions sont : $r_A = r_0.(1 + \sin\alpha)$ et $r_P = r_0.(1 - \sin\alpha)$ 9) Vitesse de libération : $v_l = \sqrt{2}.v_0 = \sqrt{\frac{2.G.M}{R_0}}$ 10) Pour $v_2 = 5.v_0 > v_l$: la trajectoire du vaisseau est hyperbolique. A l'infini : $v(\infty) = \sqrt{23}.v_0 = 4{,}8.v_0$ **C.1:** 1) Appliquons le PFD à l'électron décrivant une trajectoire circulaire dans le référentiel de l'atome supposé galiléen : $m_e.\vec{a} = -\frac{e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.R^2}\overrightarrow{u_r}$. Par projection sur $\overrightarrow{u_r}$: $-m_e.\frac{v^2}{R} = -\frac{e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.R^2}$ soit $v = \sqrt{\frac{e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.m_e.R}}$ Avec $v = R.\omega = \frac{2.\pi}{T}R$; $T = \sqrt{\frac{16.\pi^3.\varepsilon_0.m_e.R^3}{e^2}}$ A.N. : $v = 2{,}2.10^6 m.s^{-1}$ et $T = 1{,}4.10^{-16}s$ 2) $\delta w = \vec{F}.\overrightarrow{dl} == -\frac{e^2}{4.\pi.\varepsilon_0}\left(\frac{dr}{r^2}\right) = -dE_{Pe}$ soit $\frac{dE_{Pe}}{dr} = \frac{e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.r^2}$ Par intégration : $E_{Pe} = -\frac{e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.r}$ si on pose que pour $r \to \infty$; $E_{Pe} = 0$ Pour une trajectoire circulaire de rayon R : $E_{Pe} = -\frac{e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.R}$ $E = \frac{1}{2}m_e.v^2 - \frac{e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.R}$ Sachant que $v = \sqrt{\frac{e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.m_e.R}}$: $E = -\frac{e^2}{8.\pi.\varepsilon_0.R}$ On retrouve l'expression de l'énergie mécanique pour une trajectoire circulaire : $E = \frac{E_{Pe}}{2} = -E_C$ 3) Energies mécaniques $E_n = -\frac{e^2}{8.\pi.\varepsilon_0.R_n}$ et $E_p = -\frac{e^2}{8.\pi.\varepsilon_0.R_p}$ Avec $L = m_e.R.v = \sqrt{\frac{m_e.e^2.R}{4.\pi.\varepsilon_0}}$; $L_n = \sqrt{\frac{m_e.e^2.R_n}{4.\pi.\varepsilon_0}}$ et $L_p = \sqrt{\frac{m_e.e^2.R_p}{4.\pi.\varepsilon_0}}$ et $E_p - E_n = \frac{e^2}{8.\pi.\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_p}\right) = \frac{m_e.e^4}{32.\pi^2.{\varepsilon_0}^2}\left(\frac{1}{{L_n}^2} - \frac{1}{{L_p}^2}\right) = Y.\left(\frac{1}{{L_n}^2} - \frac{1}{{L_p}^2}\right)$ avec $Y = \frac{m_e.e^4}{32.\pi^2.{\varepsilon_0}^2}$ 4) ${L_n}^2 = n^2.\left(\frac{h}{2.\pi}\right)^2$ et ${L_p}^2 = p^2.\left(\frac{h}{2.\pi}\right)^2$; soit $E_p - E_n = \frac{m_e.e^4}{8.{\varepsilon_0}^2.h^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{h.c}{\lambda_{np}}$; $\frac{1}{\lambda_{np}} = \frac{m_e.e^4}{8.{\varepsilon_0}^2.h^3.c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right) = R_H.\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)$

On en déduit l'expression de la constante de Rydberg : $R_H = \frac{m_e.e^4}{8.\varepsilon_0{}^2.h^3.c}$ A.N. : $R_H = \frac{9{,}1.10^{-31}.\left(1{,}6.10^{-19}\right)^4.\left(4.\pi.9.10^9\right)^2}{8.(6{,}63.10^{-34})^3.3.10^8} = 1{,}1.10^7 m^{-1}$ **C.2 :** 1) $v = \sqrt{2.G.m_0\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$ avec m_0 masse comprise dans la sphère de rayon r_0 2) $\tau = \frac{T_0}{2}$ avec $T_0 = \left(\frac{3.\pi}{8.\rho_0.G}\right)^{\frac{1}{2}}$ période d'une petite particule initialement située à la distance r_0. On en déduit que $\tau = \left(\frac{3.\pi}{32.\rho_0.G}\right)^{\frac{1}{2}} = 2{,}8.10^6\ années.$