T.D. n° 6 Mécanique

Thème : Moment cinétique et solide en rotation

A.1: Sensibilité du pendule Holweck-Lejay

Une masse ponctuelle m est placée à l'extrémité A d'une tige de masse négligeable et de longueur $l = OA$, articulée en O et mobile dans un plan vertical. Un ressort exerce sur cette tige un couple de rappel $-C.\theta$ où θ désigne l'angle de la tige et de la verticale ascendante Oz. On désigne par $\vec{g}$ le champ de pesanteur.

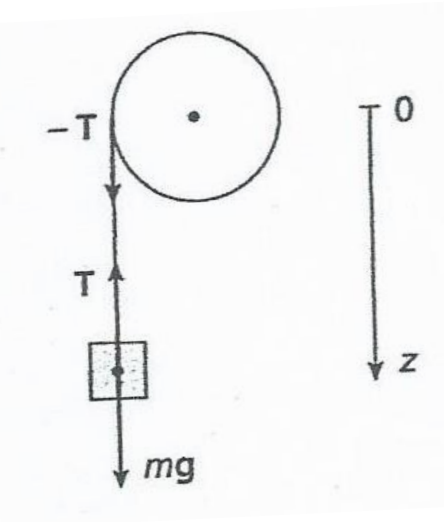
1) On considère que l'angle θ est petit. A quelle condition la position $\theta = 0$ correspond-elle à un équilibre stable ?

2) Cette condition étant supposée réalisée, calculer la période T des petites oscillations autour de cette position, période que l'on écrira sous la forme $T = 2.\pi\sqrt{\frac{l}{A-g}}$ Exprimer A.

3) Calculer la variation relative de période $\frac{\Delta T}{T}$ correspondant à une variation Δg du champ de pesanteur. Montrer que cet appareil peut-être rendu plus sensible qu'un pendule simple pour une précision $\frac{\Delta T}{T}$ de la mesure de la période donnée.

A.2: Régulateur de Foucault

Un point P de masse m est accroché à un fil enroulé autour d'un cylindre homogène de rayon R de masse M et d'axe horizontal fixe. La chute du point P entraine la rotation du cylindre. Ce cylindre muni d'ailettes est soumis à la résistance de l'air que l'on représente par un couple de frottement $-f.\dot{\theta}$ où $\dot{\theta}$ représente la vitesse angulaire de rotation du cylindre. Le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe de rotation est $J_\Delta = \frac{1}{2}m.R^2$.

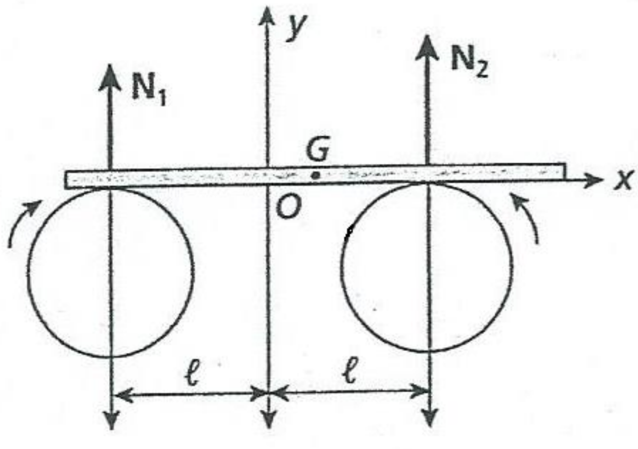


1) Déterminer la norme de la force $\vec{T}$.

2) Le système étant abandonné sans vitesse initiale, déterminer l'expression de $\dot{\theta}(t)$.

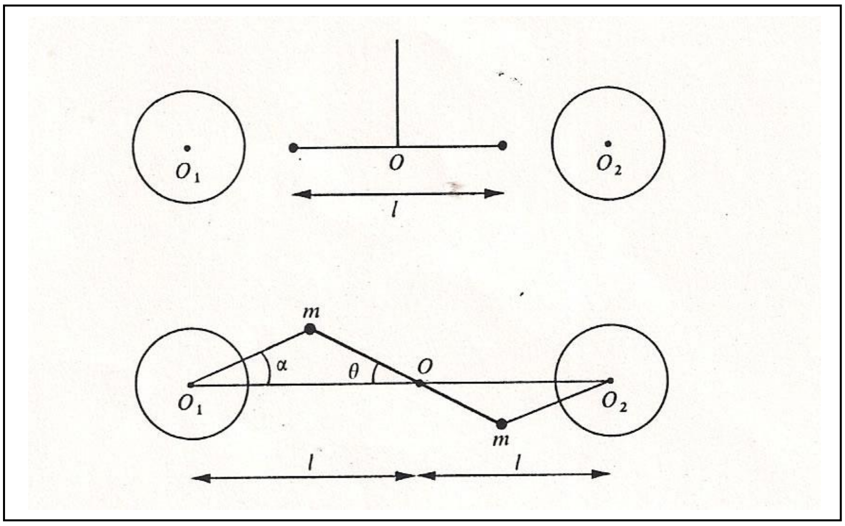
B.1: Un oscillateur curieux, mesure d'un coefficient de frottement

Une planche mince, homogène, repose horizontalement sur deux cylindres tournants en sens inverses. On nomme à I_1 et I_2 les points de contact de la planche avec les cylindres. Les axes de ces deux cylindres sont distants de $2.l$ et on désigne par f_c le coefficient de frottement dynamique de la planche sur les cylindres.



A l'instant initial, la planche est abandonnée sans vitesse initiale, son centre d'inertie G n'étant pas sur l'axe Oy.
1) En appliquant le théorème du moment cinétique à la planche par rapport à I_1 puis par rapport à I_2, déterminer les composantes verticales des réactions des deux cylindres en fonction de l'abscisse x de G.
2) On suppose que les cylindres tournent assez vite pour que la planche glisse sans cesse sur les deux rouleaux. Montrer que cette planche effectue alors des oscillations dont on donnera la période.
Comment peut-on déterminer f_c à l'aide de cette expérience ?
3) On inverse le sens de rotation de chacun des cylindres. Que devient l'équation différentielle du mouvement ? Quelle est la différence essentielle par rapport au cas précédent ?

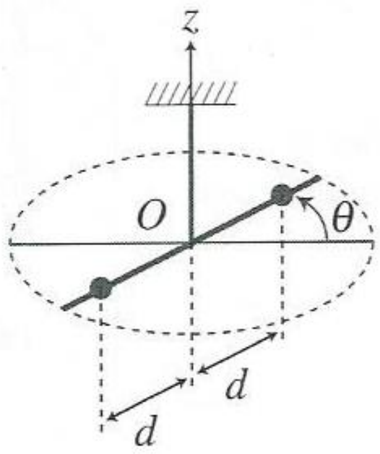
B.2: Expérience de Cavendish
Une tige de longueur l et de masse négligeable est suspendue par son centre O à un fil de torsion de constante C. Cette tige porte à chaque extrémité une masse ponctuelle m. Le pendule de torsion ainsi constitué oscille dans le plan horizontal avec une période T_0. On place alors, de part et d'autre de O, deux sphères homogènes, identiques, de masses M, et de centres O_1 et O_2. La direction O_1O_2 coïncide avec la position d'équilibre de la tige ; $O_1O = O_2O = l$. On fait à nouveau osciller le pendule, l'angle θ dont tourne la tige à partir de sa position d'équilibre étant petit ; la nouvelle période est T.



1) Exprimer T_0 en fonction de C, de m et l.
2) Montrer que, θ étant petit, $\alpha = \theta$
3) En ne tenant compte que de l'action de chaque sphère sur la masse ponctuelle, calculer le couple de rappel supplémentaire qui s'exerce sur le pendule de torsion du fait de l'attraction universelle. Montrer que la mesure de T permet, connaissant T_0 , M, m et l de déterminer la constante d'attraction universelle G. Application numérique : Calculer $\frac{(T-T_0)}{T_0}$ pour T_0 = 300 s ; l = 20,0 cm ; m = 50,0 g , M = 30,0 kg , G = $6{,}67.10^{-11}$ SI
4) Lorsqu'il eut déterminé la valeur de G, Cavendish s'exclama : « J'ai pesé la Terre… ». Justifier.

B.3: Etude d'un pendule de torsion :

Un pendule de torsion est constitué par une barre horizontale suspendue en son centre O à l'extrémité inférieure d'un fil métallique dont l'extrémité supérieure est reliée à un support fixe. La barre peut donc tourner autour de l'axe Oz matérialisée par le fil. Cet axe vertical est orienté vers le haut. Le fil exerce sur la barre une action mécanique de rappel dont le moment par rapport à l'axe Oz est $-C.\theta$ où θ est l'angle de torsion et C la constante de raideur du fil.



On ajoute à la barre deux surcharges identiques, de masses m chacune, que l'on place symétriquement par rapport à O. La distance variable entre les centres d'inertie des surcharges et O est notée d.

Le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz de l'ensemble "barre + surcharges" est noté J. On admet qu'il est de la forme $J = J_0 + 2.m.d^2$. Le système étant au repos (le fil ayant donc une torsion nulle) on fait tourner l'ensemble "barre + surcharges" d'un angle θ_0 autour de Oz puis on le lâche sans vitesse initiale. Le mouvement est repéré par l'angle θ entre la direction de la barre au repos et à l'instant t.

1) Exprimer l'énergie mécanique du système en fonction de C, J, θ et $\dot{\theta}$.

2) On fait l'hypothèse qu'il n'y a aucun frottement. Donner dans ce cas la loi horaire $\theta(t)$ du mouvement de la barre et exprimer la période T_0 de son mouvement en fonction de C et J.

3) On mesure la période des oscillations pour différentes valeurs de la distance d. Les résultats sont rassemblés dans le tableau ci-dessous :

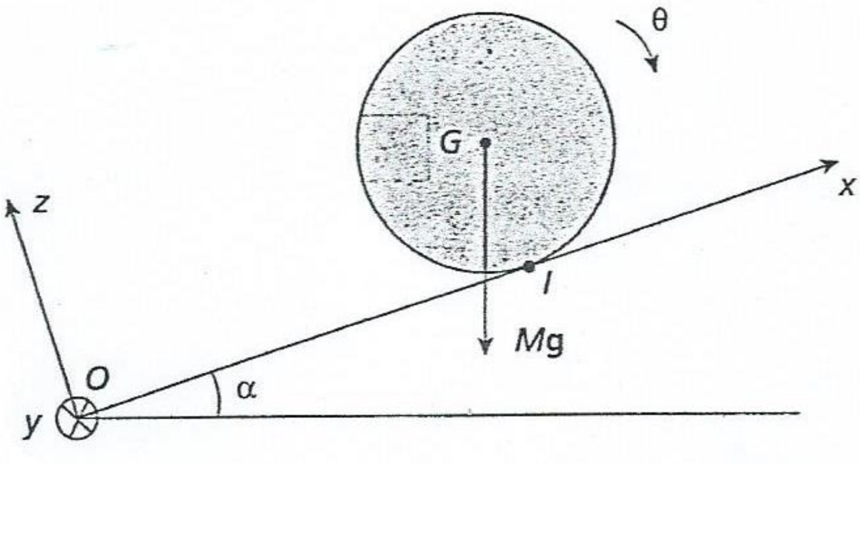
d (cm)	10,0	15,0	18,0
T_0 (s)	10,8	13,3	15,1

-a- Trouver la valeur de C sachant que $m = 50\ g$.

-b- La constante de raideur est donnée par $C = \frac{\mu.\pi.\delta^4}{32.l}$ où μ est une caractéristique du matériau constituant le fil, δ son diamètre et l sa longueur. Sachant que le fil est en argent, que $l = 0{,}5\ m$ et $\delta = 0{,}5\ mm$, calculer μ pour l'argent. Préciser l'unité SI de μ.

B.4: Glissement d'un cylindre

Un cylindre de masse M, de rayon R, de moment d'inertie $J_\Delta = \frac{1}{2}M.R^2$ par rapport à l'axe Δ passant par G est posé à l'instant $t = 0$ sur un plan incliné faisant l'angle α avec l'horizontale. Sa vitesse angulaire initiale est $\dot{\theta}(t = 0) = \omega_0$. On désigne par f le coefficient de frottement de glissement (coefficients statique et dynamique confondus).



On constate que pour une certaine valeur α_0 de α, le barycentre G du cylindre reste immobile pour $0 \leq t \leq \tau$.

1) Déterminer cette valeur α_0 ainsi que la durée τ de cette phase du mouvement.

Dans la suite, α a la valeur particulière α_0.

2) Quel est l'état cinématique du cylindre à l'instant τ ?

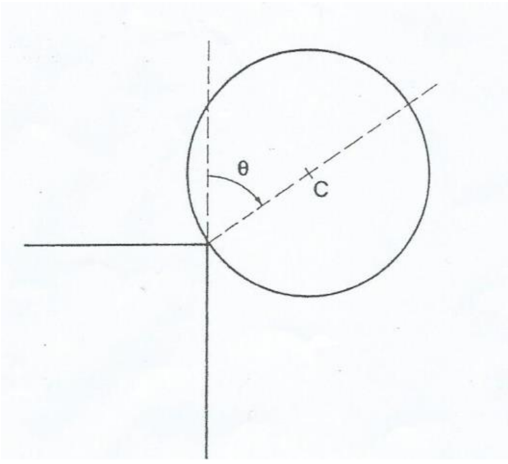
3) Pour $t > \tau$, le cylindre roule sans glisser sur son support. Déterminer la réaction $\vec{R}$ exercée par le support sur le cylindre.

C.1: Chute d'un cylindre

Un cylindre plein homogène, de rayon R, de masse m est lâché sans vitesse initiale à partir de la position caractérisée par l'angle $\theta = 0$ sur l'arête rectiligne horizontale d'une table. Le contact cylindre-arête de la table est caractérisé par le coefficient de frottement solide f. On donne le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'arête de la table : $J_\Delta = \frac{3}{2} m.R^2$

1) Déterminer les composantes normales et tangentielle de la réaction de l'arête sur le cylindre.

2) Est qu'il y a amorce de glissement avant la rupture de contact entre le cylindre et la table ? Argumentez.



Solutions :

A.1: 1) En appliquant le TMC à la masse ponctuelle, on établit : $m.l^2.\ddot{\theta} = m.g.l.\sin\theta - C.\theta$. Dans l'hypothèse des petits angles, cette équation différentielle se ramène à : $\ddot{\theta} + \omega^2.\theta = 0$ avec $\omega^2 = \frac{C}{m.l^2} - \frac{g}{l}$. La position $\theta = 0$ est stable si $C > m.g.l$ 2) $T = 2.\pi\sqrt{\frac{l}{A-g}}$ avec $A = \frac{C}{m.l}$ 3) En notant que $g = g_0 + \Delta g$, $T_0 = 2.\pi\sqrt{\frac{l}{A-g_0}}$ et $T = 2.\pi\sqrt{\frac{l}{A-(g_0+\Delta g)}}$. On établit que $\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta g}{2.(g_0 - A)}$ Rq : on vérifie que le pendule de Holweck-Lejay est plus sensible qu'un pendule simple **A.2:** En appliquant le théorème de la résultante cinétique à $P(m)$ on peut déterminer la tension : $m.\ddot{z} = m.g - T$. En notant que $z(t) = R.\theta(t)$ on établit que $T = m.g - m.R.\ddot{\theta}$. Appliquons alors le TMC au cylindre en posant $\vec{\omega} = \dot{\theta}.\vec{u}$ (avec $\vec{u}$ vecteur rentrant) : $J_\Delta.\ddot{\theta} = R.T - f.\dot{\theta}$. En explicitant T, nous établissons l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{\theta} + \frac{2.f}{3.m.R^2}\dot{\theta} = \frac{2.g}{3.R}$ Compte tenue des CI, par intégration, on établit que : $\dot{\theta}(t) = \frac{m.g.R}{f}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ avec $\tau = \frac{3.m.R^2}{2.f}$ **B.1:** 1) $\left(\frac{dL_{I1}}{dt}\right) = 2.l.N_2 - (l+x).m.g = 0$ donc $N_2 = \frac{(l+x).m.g}{2.l}$ De la même manière, on établit que $N_1 = \frac{(l-x).m.g}{2.l}$ 2) En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la planche, par projection sur $\vec{u}_x$: $m.\ddot{x} = T_1 - T_2$ avec $T_1 = f_c.N_1$ et $T_2 = f_c.N_2$, ceci nous conduit à l'équation différentielle du mvt de la planche : $\ddot{x} + \omega^2.x = 0$ avec $\omega = \sqrt{\frac{f_c.g}{l}}$. Période des oscillations : $T = 2.\pi\sqrt{\frac{l}{f_c.g}}$ 3) Si on inverse le sens de rotation des cylindres, l'équation différentielle du mvt devient $\ddot{x} - \omega^2.x = 0$: O est une position d'équilibre instable **B.2:** 1) En appliquant le TMC au pendule de torsion : $\frac{dL_\Delta}{dt} = -C.\theta$ avec $L_\Delta = L_{tige/\Delta} + 2.L_{masse/\Delta} =$

$2.m.\left(\frac{l}{2}\right)^2.\dot{\theta} = m.\frac{l^2}{2}\dot{\theta}$ avec $L_{tige/\Delta} = 0$; soit $m.\frac{l^2}{2}\ddot{\theta} = -C.\theta$. Ce qui nous conduit à l'équation différentielle du mvt : $\ddot{\theta} + \omega_0{}^2.\theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{2.C}{m.l^2}}$ On en déduit l'expression de la période du pendule de torsion : $T_0 = 2.\pi\sqrt{\frac{m.l^2}{2.C}}$ 2) pour de petits angles, $\tan\theta = \tan\alpha$ donc $\alpha = \theta$ 3) En présence des deux masses, le pendule de torsion est soumis à un couple de forces : $M_\Delta = -2.F.l.\theta$ avec $F = \frac{G.M.m}{r^2} = \frac{4.G.M.m}{l^2}$ De la même manière qu'en 1), l'application du TMC conduit à : $m.\frac{l^2}{2}\ddot{\theta} = -C.\theta - 2.F.l.\theta$; soit l'équation différentielle du mouvement du pendule $\ddot{\theta} + \omega^2.\theta = 0$ avec $\omega = \omega_0.\sqrt{1 + \frac{8.G.M.m}{l.C}}$ Ainsi $T = \frac{T_0}{\sqrt{1+\frac{8.G.M.m}{l.C}}}$ A.N.: $\left|\frac{T-T_0}{T_0}\right| = 3{,}33.10^{-3}$ 4) Avec $g_0 = \frac{G.M_T}{R_T{}^2}$, connaissant G, g_0 et R_T, Cavendish peut déterminer la masse de la Terre **B.3:** 1) $E_C = \frac{1}{2}J_z.\dot{\theta}^2$avec $E_C = \frac{1}{2}J_z.\dot{\theta}^2$, $\frac{dE_C}{dt} = J_z.\dot{\theta}.\ddot{\theta} = (J_z.\ddot{\theta}).\dot{\theta}$ avec $J_z.\ddot{\theta} = M_z$ (TMC) et $\dot{\theta} = \omega$: $\frac{dE_C}{dt} = M_z.\omega = P = \frac{\delta w}{dt} = -\frac{dE_P}{dt}$. En explicitant : $-C.\theta.\dot{\theta} = -\frac{dE_P}{dt}$ Par intégration : $E_P(\theta) = \frac{1}{2}C.\theta^2 + A$. Si on pose que $E_P(\theta = 0) = 0$ alors $A = 0$: $E_P(\theta) = \frac{1}{2}C.\theta^2$. Ainsi $E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}J_z.\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C.\theta^2$. 2) On suppose qu'il n'y a pas de forces non-conservatives donc $E_m = cte$. En dérivant E_m par rapport au temps : $\ddot{\theta} + \omega_0{}^2.\theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_z}}$ soit $T_0 = \frac{2.\pi}{\omega_0} = 2.\pi\sqrt{\frac{J_z}{C}}$ 3-a-b) A.N.: $C = 10^{-3}\ kg.m^2.s^{-2}$ et $\mu = 10^{11}\ kg.m^{-1}.s^{-2}$ **B.4:** 1) En appliquant le théorème de la résultante cinétique au cylindre, par projection sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ on établit : $M.\ddot{x} = 0 = T - M.g.\sin\alpha_0$ et $M.\ddot{z} = 0 = N - M.g.\cos\alpha_0$. Le cylindre glisse sur son support donc $T = f.N$ et $\tan\alpha_0 = f$. Appliquons le TMC au cylindre : $J_\Delta.\ddot{\theta} = -R.T = -R.M.g.f.\cos\alpha_0$. Soit $\ddot{\theta} = -\frac{2.g.f.\cos\alpha_0}{R}$ En intégrant : $\dot{\theta}(t) = \omega_0 - \frac{2.g.f.\mathrm{t}.\cos\alpha_0}{R}$. Pour $t = \tau$, $\dot{\theta} = 0$ soit $\tau = \frac{R.\omega_0}{2.g.\sin\alpha_0}$ 2) Le cylindre est au repos 3) $N = M.g.\cos\alpha_0$ et $T = \frac{m.g}{3}\sin\alpha_0$

C.1: 1) En appliquant le théorème de la résultante cinétique au cylindre : $m.\vec{a}(C) = \vec{p} + \vec{R}$ et en explicitant dans la base de coordonnées polaires nous obtenons, sur $\vec{u}_r$: $m(-R.\dot{\theta}^2) = -m.g.\cos\theta + N$, sur $\vec{u}_\theta$: $m.(R.\ddot{\theta}) = m.g.\sin\theta + T$. En appliquant le TRC au système : $J_\Delta.\ddot{\theta} = M_{\Delta,rés}$ avec $M_{\Delta,\vec{R}} = 0$ et $M_{\Delta,\vec{p}} = m.g.\mathrm{R}.\sin\theta$, on établit ainsi que : $T = -\frac{1}{3}m.g.\sin\theta$. Pour déterminer N, multiplions la relation obtenue sur $\vec{u}_\theta$ par $\dot{\theta}$ puis intégrons en tenant compte des CI :$m.R.\dot{\theta}^2 = \frac{4}{3}m.g.(1 - \cos\theta)$ (il est également possible d'appliquer le TEC au système pour établir cette relation). On établit alors que : $N = \frac{m.g}{3}(7.\cos\theta - 4)$ 2) Soit θ_1 l'angle à partir duquel il y a amorce de glissement et θ_2 l'angle pour lequel il y a rupture de contact. Dès qu'il y a glissement, la loi de Coulomb est vérifiée : $|T| = f.N$. En explicitant : $\frac{1}{3}m.g.\sin\theta_1 = f.\frac{m.g}{3}(7.\cos\theta_1 - 4)$ et $\cos\theta_1 = \frac{4}{7} + \frac{\sin\theta_1}{7.f}$ Quand il y a rupture de contact : $N = 0$ et $\cos\theta_2 = \frac{4}{7}$ Avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on vérifie que $\cos\theta_1 > \cos\theta_2$ ce qui implique que $\theta_1 < \theta_2$. Ainsi, il y a amorce de glissement avant la rupture de contact.