Problème : La mission spatiale Rosetta

1)-a- Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la comète assimilée à un point matériel M de masse m observé dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen. Dans ce référentiel, M est soumis uniquement à la force gravitationnelle $\vec{F}$ exercée par le Soleil :

$$m.\vec{a}(M) = \vec{F}$$

Pour une trajectoire circulaire de rayon R, cette relation devient :

$$-m.R.\omega^2.\vec{u}_r = -\frac{G.M_S.m}{R^2}\vec{u}_r$$

avec $\omega = \frac{2.\pi}{T}$ on établit la $3^{ème}$ de Kepler :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M_S}$$

1)-b- Généralisation à une trajectoire elliptique :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M_S}$$

1)-c- Application numérique : $T = \left(\frac{4.\pi^2.a^3}{G.M_S}\right)^{\frac{1}{2}} = 2{,}1.10^8\ s = 6{,}5\ ans$

2) Par définition : $\vec{L}_S = \overrightarrow{SM}\,\Lambda\, m.\vec{v}(M)$. Appliquons le théorème du moment cinétique à M : $\left(\frac{d\vec{L}_S}{dt}\right)_R = \overrightarrow{SM}\,\Lambda\,\vec{F}$. Avec $\overrightarrow{SM} = \vec{r}$ et $\vec{F} = F(r).\vec{u}_r$ (force centrale) $\left(\frac{d\vec{L}_S}{dt}\right)_R = \vec{0}$ donc le moment cinétique de M par rapport à S est un vecteur constant : $\vec{L}_S = \overrightarrow{C^{te}}$. On en déduit que la trajectoire de M est plane et que le plan du mouvement passe par S.

Avec $\overrightarrow{SM} = \vec{r}$ et $\vec{v}(M) = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$, si on pose que : $\vec{u}_r\Lambda\,\vec{u}_\theta = \vec{u}_z$ on établit que :

$$\vec{L}_S = m.r^2.\dot{\theta}.\vec{u}_z$$

Expression de $C = \frac{\|\vec{L}_S\|}{m}$:

$C = r^2.\dot{\theta} = C^{te}$: le système satisfait la loi des aires.

3) Soit $\vec{F}$ la force exercée par le Soleil sur la comète : $\vec{F} = -\frac{G.M_S.m}{r^2}\vec{u}_r$. La force $\vec{F}$ est conservative :

$$\delta w = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = -dE_P$$

En explicitant :

$$\frac{dE_P}{dr} = \frac{G.M_S.m}{r^2}$$

Dont la primitive est :

$$E_P(r) = -\frac{G.M_S.m}{r} + A$$

où A est une constante additive. Si on pose que l'énergie potentielle est nulle à l'infini, alors $A = 0$:

$$E_P(r) = -\frac{G.M_S.m}{r}$$

Sachant que la comète décrit une trajectoire plane, en coordonnées polaires :

$$E_C(M) = \frac{1}{2}m.\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m.\left(r.\dot{\theta}\right)^2$$

La force $\vec{F}$ étant conservative, $dE_m = \delta w^{nc} = 0$ donc l'énergie mécanique de M est constante.

$$E_m = E_C(M) + E_P(r) = C^{te}$$

Explicitons :

$$E_m = -\frac{G.M_S.m}{r} + \frac{1}{2}m.\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m.\left(r.\dot{\theta}\right)^2$$

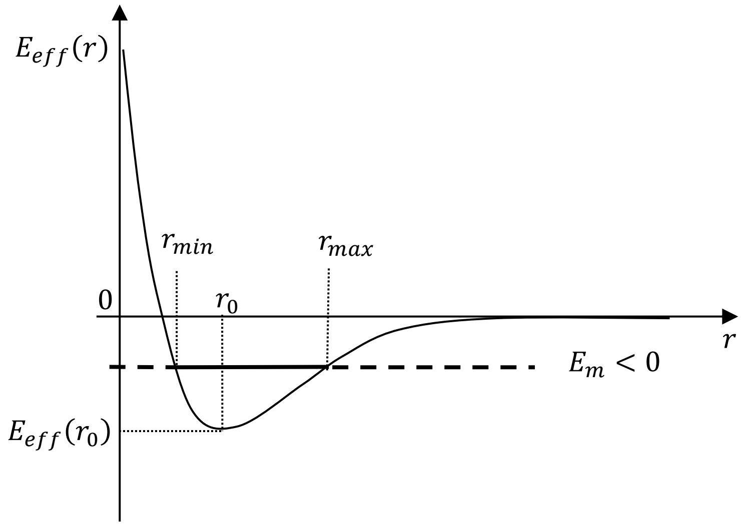
Sachant que $C = r^2.\dot{\theta}$, on établit que :

$$\tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_m - E_{eff}(r) \quad \text{avec :}$$

$$E_{eff}(r) = \frac{1}{2}m.\frac{C^2}{r^2} - \frac{G.M_S.m}{r}$$

Allure de $E_{eff}(r)$:

- Pour $r \to 0$: $E_{eff}(r) \sim \frac{1}{2}m.\frac{C^2}{r^2} \to \infty$
- Pour $r \to \infty$: $E_{eff}(r) \sim -\frac{G.M_S.m}{r} \to 0^-$
- La fonction $E_{eff}(r)$ admet donc un minimum pour $r = r_0$ (cf question 4)).



4) Pour $E_m = E_0 = E_{eff}(r_0)$: $r_{min} = r_{max} = r_0$, la trajectoire de M est circulaire et uniforme. Sachant que pour $r = r_0$ la fonction $E_{eff}(r)$ est minimale, dérivons $E_{eff}(r)$ par rapport à r :

$$\left(\frac{dE_{eff}(r)}{dr}\right)_{r_0} = -\frac{m.C^2}{{r_0}^3} + \frac{G.M_S.m}{{r_0}^2} = 0$$

Soit :

$$r_0 = \frac{C^2}{G.M_S}$$

$$E_0 = E_{eff}(r_0) = \frac{1}{2}\frac{G.M_S.m}{r_0} - \frac{G.M_S.m}{r_0} = -\frac{1}{2}\frac{G.M_S.m}{r_0}$$

$$E_0 = -\frac{1}{2}\frac{G.M_S.m}{r_0}$$

Avec $E_P(r_0) = -\frac{G.M_S.m}{r_0}$ et $E_C(r_0) = \frac{1}{2}m.\frac{C^2}{{r_0}^2} = \frac{1}{2}\frac{G.M_S.m}{r_0}$ (car $\dot{r} = 0$ pour $r = r_0$), on constate que :

$$E_C(r_0) = -\frac{E_P(r_0)}{2}$$

On vérifie que pour une trajectoire circulaire et uniforme :

$$E_0 = \frac{E_P(r_0)}{2} = -E_C(r_0)$$

5) A l'aphélie ou au périhélie : $\dot{r} = 0$ donc : $E_m = E_{eff}(r) = \frac{1}{2}m.\frac{C^2}{r^2} - \frac{G.M_S.m}{r}$

On établit l'équation du second degré en r :

$$r^2 + \left(\frac{G.M_S.m}{E_m}\right).r - \frac{m.C^2}{2.E_m} = 0$$

Discriminant : $\Delta = \left(\frac{G.M_S.m}{E_m}\right)^2 + \frac{4.m.C^2}{2.E_m}$ les solutions r_{min} et r_{max} étant réelles, nous admettrons que $\Delta > 0$. Les solutions de cette équation sont :

$$r_{max} = -\frac{G.M_S.m}{2.E_m} + \sqrt{\left(\frac{G.M_S.m}{2.E_m}\right)^2 + \frac{m.C^2}{2.E_m}}$$
$$r_{min} = -\frac{G.M_S.m}{2.E_m} - \sqrt{\left(\frac{G.M_S.m}{2.E_m}\right)^2 + \frac{m.C^2}{2.E_m}}$$

Rq : on vérifie que r_{min} et r_{max} sont positives (avec $E_m < 0$).

Sachant que : $r_{min} + r_{max} = 2.a$:

$$2.a = -\frac{G.M_S.m}{E_m}$$

On établit l'expression de l'expression de l'énergie mécanique en fonction du demi-grand axe a de l'ellipse :

$$E_m = -\frac{G.M_S.m}{2.a}$$

A partir de la figure, on peut dire que :

$$r_{max} = a.(1+e)$$
$$r_{min} = a.(1-e)$$

Où e correspond à l'excentricité de l'ellipse. En explicitant r_{min} et r_{max} dans les expressions établies :

$$r_{max} = a.(1+e) = -\frac{G.M_S.m}{2.E_m} + \sqrt{\left(\frac{G.M_S.m}{2.E_m}\right)^2 + \frac{m.C^2}{2.E_m}}$$
$$r_{min} = a.(1-e) = -\frac{G.M_S.m}{2.E_m} - \sqrt{\left(\frac{G.M_S.m}{2.E_m}\right)^2 + \frac{m.C^2}{2.E_m}}$$

$$r_{max} - r_{min} = 2.a.e = 2\sqrt{\left(\frac{G.M_S.m}{2.E_m}\right)^2 + \frac{m.C^2}{2.E_m}}$$

$$a^2.e^2 = \left(\frac{G.M_S.m}{2.E_m}\right)^2 + \frac{m.C^2}{2.E_m} = a^2 + \frac{m.C^2}{2.E_m}$$

On établit ainsi que :

$$1 - e^2 = -\frac{m.C^2}{2.a^2.E_m}$$

6) La vitesse aréolaire correspond à la vitesse de balayage du plan par le rayon polaire. Celle-ci est définie par :

$$\vec{v}_{ar} = \frac{\overrightarrow{dS}}{dt} \text{ avec } \overrightarrow{dS} = \frac{\vec{r} \wedge \overrightarrow{dl}}{2}$$

Soit :

$$\vec{v}_{ar} = \frac{\overrightarrow{dS}}{dt} = \frac{\vec{r} \wedge \vec{v}(M)_R}{2} = \frac{C}{2}\vec{u}_z$$

Sachant que $C = C^{te}$, la vitesse aréolaire est constante. En explicitant la vitesse aréolaire sur une période :

$$v_{ar} = \frac{S}{T} = \frac{C}{2}$$

Avec $S = \pi.a^2.\sqrt{1-e^2}$:

$$\frac{\pi.a^2.\sqrt{1-e^2}}{T} = \frac{C}{2}$$

$$1 - e^2 = \frac{C^2}{4}\frac{T^2}{(\pi.a^2)^2}$$

Avec

$$1 - e^2 = -\frac{m.C^2}{2.a^2.E_m} = \frac{C^2}{G.M_S.a}$$

avec $E_m = -\frac{G.M_S.m}{2.a}$

On établit que :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M_S}$$

Cette relation est identique à celle établie en 1)-b- Nous reconnaissons la troisième loi de Kepler.