

T.D. n° 2**Signaux physiques**

Thèmes : Lentilles minces et systèmes optiques

A.1 : Invariant de Lagrange-Helmholtz

- 1) Considérons une lentille mince convergente de distance focale f' . Un objet AB est placé à une distance d supérieure à f' devant la lentille. Placer l'image A'B' de AB par construction.
- 2) Un rayon issu du point A fait un angle α par rapport à l'axe optique. Après traversée de la lentille, il fait un angle α' pour converger sur le point A'. Quelle relation existe-t-il entre α , α' , AB et A'B' ? Cette relation constitue l'invariant de Lagrange-Helmholtz

A.2 : Etude d'un téléobjectif

A l'aide d'une lentille convergente de 20 cm de distance focale, on photographie une tour de 30 m de haut située à une distance de 3 km.

- 1) Quelle sera, sur le cliché, la hauteur h_1' de l'image obtenue ?
- 2) On place à 15,5 cm en arrière de la première lentille, une lentille mince divergente de distance focale 5 cm. L'ensemble de ces deux lentilles constitue un téléobjectif. Quelle est la hauteur h_2' de la nouvelle image ? Quelle est la distance L de la première lentille à la plaque photographique (encombrement) ?
- 3) Quelle serait la distance focale d'une lentille mince convergente qui donnerait, à elle seule, une image de même dimension que la précédente ? Quel serait alors l'encombrement ?

A.3: Lunette de visée

Une lunette de visée est un système centré composé de deux lentilles minces convergentes :

- l'objectif (face à l'objet) de distance focale image $f'_1 = 8,0 \text{ cm}$
- l'oculaire (face à l'oeil) de distance focale image $f'_2 = 1,0 \text{ cm}$

La distance objectif-oculaire est $\overline{O_1O_2} = 10,0 \text{ cm}$. Une règle graduée au demi-millimètre est placée dans le plan focal objet de l'oculaire.

- 1) L'oeil voit net sans accommoder l'image de l'objet. Calculer la distance d entre l'objet et l'objectif.
- 2) Quelle est la taille d'un objet dont l'image fait 5 mm sur la règle placée dans le plan focal objet de l'oculaire ?

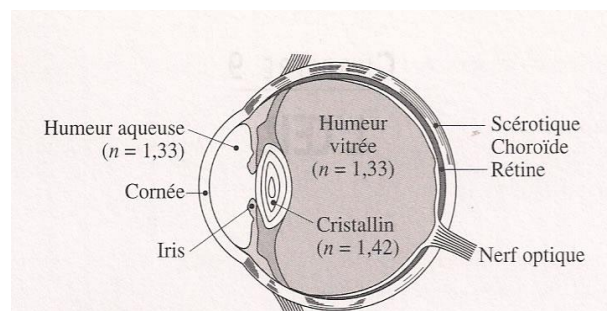
A.4: Projection à l'aide d'une lentille convergente

On désire projeter l'image d'un objet AB sur un écran E, parallèle à AB, situé à une distance D de AB. Pour ce faire, on utilise une lentille mince convergente de centre O et de distance focale f' .

- 1) Montrer que pour obtenir sur E une image de AB, la distance D doit satisfaire la relation $D > 4.f'$.
- 2) En supposant cette condition réalisée, montrer qu'il y a deux positions possibles pour la lentille. Dans quelle position l'image de AB est-elle agrandie ? Rétrécie ?
- 3) Que peut-on dire de ces deux positions ?
- 4) Que deviennent ces positions pour $D = 4.f'$? Que devient le grandissement ? Commenter.

B.1: Optique de l'oeil

Le cristallin de l'oeil est modélisé par une lentille mince convergente placée dans l'air. On note O son centre optique. La vergence de l'oeil notée V est variable. L'image se forme sur la rétine qui est à la distance $d = 15,0 \text{ mm}$ de O. Compte tenu du fait qu'en réalité le cristallin est au contact du fluide vitreux, on



considérera dans la suite que $d = 11,0 \text{ mm}$.

1) Commenter l'influence du fluide vitreux sur la distance d . Déterminer l'indice optique n du fluide vitreux.

2) Un observateur doté d'une vision "normale" regarde un objet $\overline{AB} = 10 \text{ cm}$ situé à $1,0 \text{ m}$ devant lui.

-a- Préciser si l'image de cet objet par le cristallin est réelle ou virtuelle, droite ou renversée ?

-b- On note $A'B'$ l'image de AB sur la rétine. Calculer le grandissement algébrique γ et en déduire la taille de l'image sur la rétine.

-c- Calculer la vergence V du système dans ces conditions.

3) L'observateur regarde maintenant un objet placé à 25 cm devant lui.

-a- Préciser si l'image est réelle ou virtuelle, droite ou renversée.

-b- Calculer la vergence de l'oeil dans ces conditions ainsi que la taille de l'image.

4) On s'intéresse maintenant à un sujet myope possédant donc un cristallin trop convergent. Lorsqu'il regarde à l'infini, l'image se forme à $0,5 \text{ mm}$ en avant de la rétine (située à $d = 11,0 \text{ mm}$ de O). Pour corriger ce problème, cette personne porte des lunettes dont chaque verre est assimilé à une lentille mince de vergence V' constante et de centre optique O' placé à $l = 2,0 \text{ cm}$ de O .

-a- Calculer la vergence V' des verres correcteurs.

-b- L'individu observe un objet situé à $1,0 \text{ m}$ devant lui. Calculer la position de l'image intermédiaire ainsi que le grandissement résultant.

B.2: Etude d'une loupe

Un observateur emmétrope, c'est à dire à vision "normale", peut voir distinctement de l'infini à une distance minimale d_m . On dit que l'observateur accommode si l'objet qu'il observe n'est pas à l'infini. Cet observateur regarde à l'oeil nu un tout petit objet que l'on assimilera à un segment AB de longueur l , perpendiculaire à l'axe optique.

1) Déterminer α_m , angle maximal sous lequel l'objet peut être vu.

2) L'observateur regarde AB à travers une lentille mince convergente de distance focale f' et de centre optique O . Son oeil est situé à une distance a de la lentille telle que $a < d_m$.

-a- Déterminer les positions de l'objet rendant possible l'observation d'une image nette par l'observateur emmétrope. Faire une construction géométrique de l'image. L'image est-elle droite ou renversée ?

-b- Pour quelle position de l'objet l'observation se fait-elle sans accommodation ? Exprimer l'angle α sous lequel l'oeil voit l'image. Application numérique : que vaut le grossissement commercial de la loupe $G = \frac{\alpha}{\alpha_m}$? On donne $d_m = 0,25 \text{ m}$ et $f' = 50 \text{ mm}$.

B.3: Doublet de Huygens

Le doublet de Huygens est un système de deux lentilles minces convergentes. Le doublet est centré et caractérisé par le triplet $(3,2,1)$. Ceci implique que si on note a la grandeur caractéristique du doublet :

- la première lentille possède une distance focale $f'_1 = 3.a$
- la distance entre les deux lentilles est $\overline{O_1O_2} = 2.a$
- la deuxième lentille possède une distance focale $f'_2 = a$.

L'utilisation du doublet de Huygens permet d'optimiser les performances de nombreux systèmes optiques (comme les lunettes astronomiques) dans la seconde moitié du $XVII^{\text{ème}}$ siècle.

Pour les applications numériques, on prendra $a = 2,0 \text{ cm}$ et on notera $\Delta = \overline{F'_1F_2}$.



Ch. Huygens

1) Placer sur un axe optique les foyers des lentilles L_1 et L_2 et déterminer par construction géométrique les foyers objet et image notés F et F' du doublet.

2) Vérifier ces résultats en déterminant algébriquement $\overline{F_1 F}$ et $\overline{F_2' F'}$.

Rq : En optique, on utilise différents types de doublets. Les plus connus sont ceux de Huygens (3,2,1) et de Ramsden (3,2,3).

B.4: Etude d'un microscope

Un microscope simplifié est constitué par deux lentilles minces convergentes de même axe optique. On suppose que chacune de ces lentilles est utilisée dans des conditions de stigmatisme et d'aplanétisme approchés.

L'objectif (L_1), de centre optique O_1 présente une distance focale image f_1' . L'oculaire (L_2), de centre optique O_2 présente une distance focale image f_2' . Le foyer image F_1' de (L_1) et le foyer objet F_2 de (L_2) sont distants de $\Delta = \overline{F_1' F_2}$ (intervalle optique), grandeur maintenue constante et positive. Un petit objet AB à étudier est placé en avant du foyer objet F_1 de l'objectif, orthogonalement à l'axe optique, le point A appartenant à cet axe. Un condensateur de lumière permet d'éclairer l'objet observé.

L'œil d'un observateur est placé derrière l'oculaire (figure 3). Le microscope permet donc d'observer, à la loupe (L_2), l'image agrandie $A_1 B_1$ de l'objet AB donnée par l'objectif (L_1), soit :

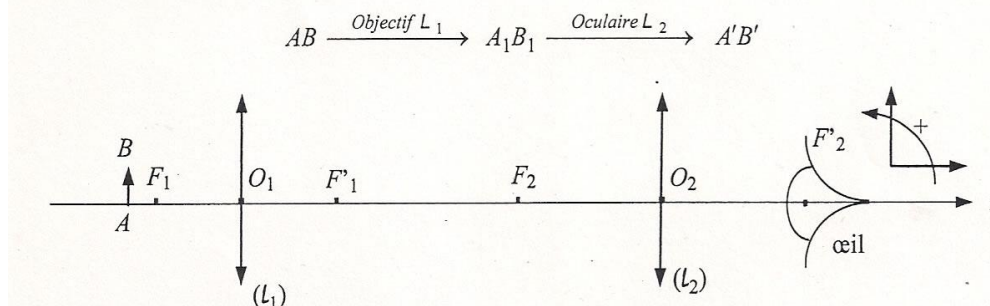


Figure 3

Le microscope est réglé pour qu'un œil, supposé normal, n'ait pas à accommoder lorsqu'il observe à travers l'appareil, l'image $A'B'$ de l'objet AB . Les conventions d'orientation, dans les mesures algébriques des angles (comptés à partir de l'axe optique) et des bipoints, sont précisées sur la figure 3.

A. Tracé de rayons

1) Donner la position de l'image intermédiaire $A_1 B_1$.

2) Faire un schéma et tracer la marche d'un pinceau lumineux étroit issu de B , point objet n'appartenant pas à l'axe.

3) Exprimer, en fonction de f_1' et Δ , le grandissement $\gamma_1 = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}}$ de l'objectif.

B. Limite de résolution angulaire de l'œil

Soit α' l'angle sous lequel l'œil voit, depuis F_2' , l'image définitive $A'B'$.

1) Ecrire, en fonction de f_1' , f_2' et Δ , l'expression de la puissance P du microscope, définie par le rapport $P = \frac{\alpha'}{\overline{AB}}$

2) La puissance P dépend-elle de la position de l'œil, en arrière de l'oculaire ?

3) Du fait de la structure granulaire de la rétine, l'œil ne peut distinguer les deux images A' et B' que si l'angle α' sous lequel il les voit, est tel que $|\alpha'| \geq \varepsilon$ (limite de résolution angulaire de l'œil). Déterminer, en fonction de f_1' , f_2' , Δ et ε , la taille $|\overline{AB}|_{\min, \text{œil}}$ du plus petit objet dont les extrémités pourraient être observées distinctement à travers le microscope.

4) Application numérique : $f_1' = 0,50 \text{ cm}$; $f_2' = 2,5 \text{ cm}$; $\Delta = 16 \text{ cm}$; $\varepsilon = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$.

Calculer la limite de résolution $|\overline{AB}|_{\min, \text{œil}}$ imposée par la structure de la rétine.

B.5: Lunette de Galilée

1) Une lunette de Galilée comprend :

- un objectif : lentille convergente L_1 de 4,0 dioptrie.
- un oculaire : lentille divergente L_2 de - 20 dioptrie.

La lunette de Galilée est centrée. Les deux lentilles sont placées à 20 cm l'une de l'autre.

-a- Faire un schéma du dispositif

-b- Tracer la marche d'un faisceau lumineux faisant un angle θ avec l'axe optique.

-c- Sous quel angle θ' ce faisceau émerge-t-il de la lunette ?

-d- Calculer le grossissement $G = \frac{\theta'}{\theta}$ de la lunette.

2) Un observateur à vue normale observe à 6,0 km les phares d'une voiture séparés de 1,2 m.

-a- Peut-il distinguer les deux phares à l'oeil nu ?

La distance minimale angulaire entre deux objets que peut séparer un oeil est de $1,0'$ d'arc (lire "une minute d'arc").

-b- Avec la lunette, sous quel angle θ' aperçoit-il les phares ? Peut-il les distinguer ?

3) Dirigeant ensuite l'objectif vers l'objet à grande distance, on se propose de recueillir une image réelle des deux phares sur un écran situé à 20 cm en arrière de l'oculaire.

-a- Que doit devenir la distance objectif-oculaire ?

-b- Calculer la distance séparant les deux phares sur l'écran.

-c- En observant ces deux images sur l'écran, à l'oeil nu, les verra-t-on séparés ?

**B.6: Etude d'une lunette astronomique**

On considère une lunette astronomique formée :

- d'un objectif constitué d'une lentille mince convergente L_1 de distance focale $f'_1 = \overline{O_1F'_1} > 0$.
- d'un oculaire constitué d'une lentille mince convergente L_2 de distance focale $f'_2 = \overline{O_2F'_2} > 0$.

Ces deux lentilles ont même axe optique Δ . On rappelle qu'un œil normal voit sans accommoder quand celui-ci est placé à l'infini. On souhaite observer la planète Mars, qui est vue à l'œil nu sous un diamètre apparent α .

1) Pour voir la planète nette à travers la lunette, on forme un système afocal.

-a- Que cela signifie-t-il ? Que cela implique-t-il pour les positions des lentilles ?

-b- Faire le schéma de la lunette en prenant $f'_1 = 5.f'_2$. Dessiner sur ce schéma la marche à travers la lunette d'un faisceau lumineux formé de rayons issus de la planète. On appellera $A'B'$ l'image intermédiaire.

-c- On souhaite photographier cette planète. Où faut-il placer la pellicule ?

2) On note α' l'angle que forment les rayons émergents extrêmes en sortie de la lunette.

-a- L'image est-elle droite ou renversée ?

-b- La lunette est caractérisée par son grossissement $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$. Exprimer G en fonction de f'_1 et f'_2 .

-c- Le principal défaut d'une lentille est appelée défaut d'aberrations chromatiques : expliquer brièvement l'origine de ce défaut et ses conséquences. Pour quelle raison un miroir n'a-t-il pas ce défaut ?

3) On veut augmenter le grossissement de cette lunette et redresser l'image. Pour cela, on interpose entre L_1 et L_2 , une lentille convergente L_3 de distance focale $f'_3 = \overline{O_3F'_3} > 0$. L'oculaire L_2 est déplacé pour avoir de la planète une image nette à l'infini à travers le nouvel ensemble optique.

-a- Quel couple de points doit conjuguer L_3 pour qu'il en soit ainsi ?

-b- On appelle γ_3 le grandissement de la lentille 3. En déduire $\overline{O_3F'_1}$ en fonction de f'_3 et γ_3 .

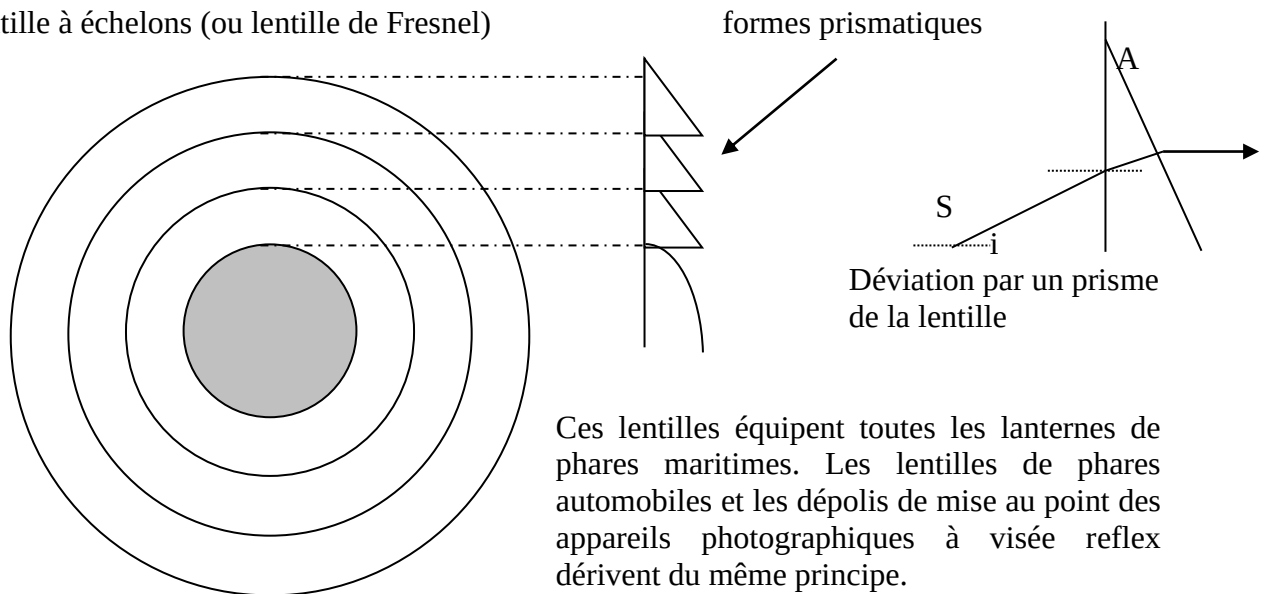
-c- Faire un schéma (on placera O_3 entre F_1' et F_2 et on appellera $A'B'$ la première image intermédiaire et $A''B''$ la seconde image intermédiaire).

-d- En déduire le nouveau grossissement G' en fonction de γ_3 et G . Comparer à G en norme et en signe.

C.1 : Lentille de FRESNEL

Les lentilles de FRESNEL sont des systèmes optiques permettant d'obtenir un faisceau lumineux sensiblement parallèle à partir d'une source ponctuelle, en dehors des conditions de GAUSS. Pour rendre ces dispositifs légers et simples à construire, ils sont basés sur l'utilisation d'une lentille centrale entourée d'anneaux de verre prismatiques d'angles au sommet bien choisis.

Lentille à échelons (ou lentille de Fresnel)



Ces lentilles équipent toutes les lanternes de phares maritimes. Les lentilles de phares automobiles et les dépolis de mise au point des appareils photographiques à visée reflex dérivent du même principe.

1) Soit un rayon lumineux arrivant sous un angle d'incidence i sur un des prismes de la lentille de FRESNEL. Déterminer la relation entre i et l'angle au sommet A du prisme traversé par le rayon assurant un émergent parallèle à l'axe optique.

2) Sachant que toutes les bases des prismes ont la même longueur, quels renseignements peut-on tirer du tracé de courbe donnant $\tan(A)$ en fonction de $\tan(i)$. Faire le tracé obtenu à partir de la relation de la question précédente pour $n = 1,7$.

C.2 : Stigmatisme approché d'une lentille mince sur son axe

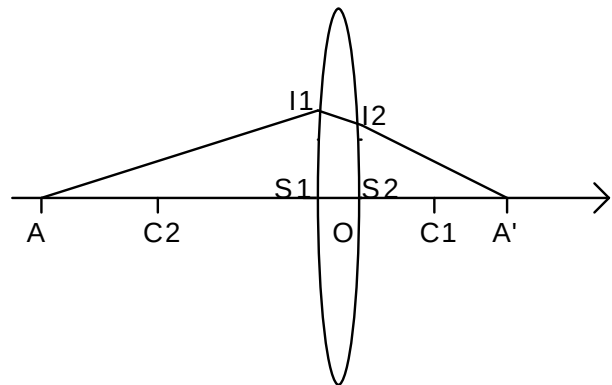
On se propose de retrouver le stigmatisme d'une lentille mince sur son axe.

Soit une lentille d'indice n placée dans l'air, dont les faces sont des dioptries sphériques air/verre identifiés par leurs centres et leurs sommets sur le schéma.

Considérons un rayon incident issu du point A sur l'axe de la lentille. Le rayon, réfracté successivement par les deux dioptries, coupe l'axe en un point B .

1) Montrer que, dans le cadre de l'approximation de Gauss, le point B s'identifie au point A' image de A par la lentille, au sens du stigmatisme approché, donné par la relation de Descartes :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{OC_1} - \frac{1}{OC_2} \right)$$



2) En déduire l'expression de la distance focale image $\overline{OF'} = f'$ de la lentille mince en fonction de son indice et de ses caractéristiques géométriques.

Solutions du TD 5 : A.1 : 2) $\alpha' \cdot \overline{A'B'} = -\alpha \cdot \overline{AB}$ **A.2 :** 1) $h_1' = 2mm$ 2) $h_2' = 2cm$.
 Encombrement $L = 60,5 \text{ cm}$ 3) $\overline{OF'} = 2m$ et $L' = 2m$ **A.3 :** 1) Avec $\overline{O_1F_2} = 9cm$,
 $\overline{O_1A} = -72cm$ 2) $\overline{AB} = \left(\frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1F_2}} \right) \cdot \overline{A_1B_1}$, $AB = 4 \text{ cm}$ **A.4 :** 1) 2) $x_1 = \frac{D}{2} + \sqrt{\Delta'}$ et $x_2 = \frac{D}{2} - \sqrt{\Delta'}$
 avec $\Delta' = \left(\frac{D}{2} \right)^2 - D \cdot f'$ (cf méthode de Bessel) 3) Ces deux positions sont symétriques par
 rapport à $\frac{D}{2}$ (méthode de Silbermann) 4) Pour $D = 4 \cdot f'$: $x_1 = x_2 = \frac{D}{2}$. Le grandissement est
 égal à -1. **B.1 :** 1) Sous l'influence du fluide vitreux, les rayons sont moins déviés donc d plus
 grand (et moins d'aberrations que dans l'air), $n = 1,36$ 2) Image réelle et renversée, $\gamma =$
 $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -11 \cdot 10^{-3}$; $\overline{A'B'} = -1,1 \text{ mm}$, $V = 92 \delta$ 3) Image réelle et renversée, $V =$
 95δ , $\overline{A'B'} = -4,4 \text{ mm}$ 4) $V' = -4,7 \delta$, $\overline{OA_i} = -19,5 \text{ cm}$, $\gamma_{rés} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_iB_i}} \cdot \frac{\overline{A_iB_i}}{\overline{AB}} = -0,01$
B.2 : 1) $\alpha_m = \frac{l}{d_m}$ 2) Pour une vision nette, il faut que l'objet soit situé dans l'intervalle de
 positions $\left[-f'; \frac{f' \cdot (a - d_m)}{f' - a + d_m} \right]$. L'image est droite. 2) Observation sans accommodation : objet
 placé en F , $\alpha = \frac{l}{f'}$ et $G = \frac{d_m}{f'} = 5$. **B.3 :** 1) La position de F' équivalent est définie par un
 faisceau incident de lumière parallèle à l'AO ; la position de F équivalent est définie par un
 faisceau émergent de lumière parallèle à l'AO 2) $\overline{F_2'F'} = -\frac{a}{2} = -1cm$ et $\overline{F_1F} = 4,5 \cdot a = 9cm$
B.4 : A-1) A_1 confondu avec F_2 A-2) Tracé de rayons : image à l'infini A-3) $\gamma_1 = -\frac{\Delta}{f_1'}$ B-1)
 $P = \frac{\Delta}{f_1' \cdot f_2'}$ B-2) Indépendant de la position de l'oeil (faisceau de lumière parallèle) B-3)
 $|\overline{AB}|_{min,oeil} = \frac{\varepsilon \cdot f_1' \cdot f_2'}{\Delta}$ B-4) $|\overline{AB}|_{min,oeil} = 0,35 \mu m$ **B.5 :** 1) Par construction F_1' est confondu avec
 F_2 : le montage est afocal. On montre que $G = \frac{f_1'}{f_2'}$ 2) $\theta = 2 \cdot 10^{-4} \text{ rad} < \theta_{lim} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$
 : l'observateur ne peut distinguer les 2 phares à l'oeil nu. Avec la lunette, l'observateur voit les
 2 phares sous un angle $\theta' = G \cdot \theta = 5 \cdot \theta = 10^{-3} \text{ rad} > \theta_{lim}$ 3) $\overline{O_1O_2} = 21 \text{ cm}$, $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} =$
 $\left(\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_iB_i}} \right) \cdot \left(\frac{\overline{A_iB_i}}{\overline{AB}} \right) = \left(\frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_i}} \right) \cdot \left(\frac{\overline{O_1A_i}}{\overline{O_1A}} \right)$ avec $\overline{O_1A_i} = \overline{O_1F_1'} = 25 \text{ cm}$; $\overline{O_1A} = -6 \text{ km}$; $\overline{O_2A_i} = 4 \text{ cm}$ et
 $\overline{O_2A'} = 20 \text{ cm}$: $\gamma = -2,1 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ et $\overline{A'B'} = \gamma \cdot \overline{AB} = -2,5 \cdot 10^{-1} \text{ mm}$. $\theta' = \left| \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_2A'}} \right| =$
 $1,25 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ (angle sous lequel on voit l'image de l'objet sur l'écran depuis O_2) : $\theta' >$
 $\theta_{lim} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$: l'observateur peut distinguer l'image des 2 phares sur l'écran. **B.6 :** 1)
 Système afocal : l'image d'un objet très éloigné est très éloignée. Ceci implique que F_1' est
 confondu avec F_2 2) Image renversée, on montre que $G = \frac{f_1'}{f_2'}$ 3) $F_1' \rightarrow F_2$, $\overline{O_3F_1'} =$
 $f_3' \cdot \left(\frac{1 - \gamma_3}{\gamma_3} \right)$, $G' = \frac{\alpha''}{\alpha} = \gamma_3 \cdot \left(\frac{f_1'}{f_2'} \right) = \gamma_3 \cdot G$: on vérifie que $G' > G$. Sur le schéma, on constate
 que l'image est à l'endroit. **C.1 :** 1) avec $D = i$, $A = i'$. On établit que
 $\sin i = \sin A \cdot \left(\sqrt{n^2 - \sin^2 A} - \cos A \right)$ 2) avec $\tan A = \frac{e}{h}$ pour un angle i donné, on connaît les
 caractéristiques du prisme permettant d'obtenir un faisceau émergent de lumière parallèle.
 Tracé : $\tan A$ est une fonction affine de $\tan i$, coef directeur $a = 1,4$.