

Exercice 3.1 : STABILISATEUR CARDIAQUE

Q1 : Par fermeture géométrique, déterminer le système d'équations liant λ , α , et γ aux paramètres géométriques.

Fermeture géométrique dans la boucle (0-1-2-3-0) :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow d_1 \vec{y}_0 = \lambda \vec{x}_0 + L_2 \vec{x}_2 + d_1 \vec{y}_1 - L_1 \vec{x}_1$$

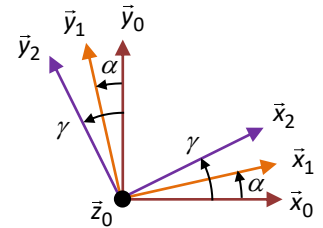
Par fermeture géométrique, déterminer le système d'équations liant λ , α , et γ aux paramètres géométriques.

Fermeture géométrique dans la boucle (0-1-2-3-0) :

$$\vec{OA} = \vec{OD} + \vec{DC} + \vec{CB} + \vec{BA} \Leftrightarrow d_1 \vec{y}_0 = \lambda \vec{x}_0 + L_2 \vec{x}_2 + d_1 \vec{y}_1 - L_1 \vec{x}_1$$

$$/\vec{x}_0 : \quad d_1 \vec{y}_0 \cdot \vec{x}_0 = (\lambda \vec{x}_0 + L_2 \vec{x}_2 + d_1 \vec{y}_1 - L_1 \vec{x}_1) \cdot \vec{x}_0$$

$$d_1 \vec{y}_0 \cdot \vec{x}_0 = \lambda \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0 + L_2 \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_0 + d_1 \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_0 - L_1 \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0$$



Par fermeture géométrique, déterminer le système d'équations liant λ , α , et γ aux paramètres géométriques.

Fermeture géométrique dans la boucle (0-1-2-3-0) :

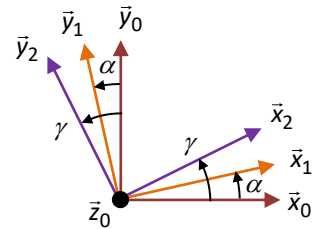
$$\vec{OA} = \vec{OD} + \vec{DC} + \vec{CB} + \vec{BA} \Leftrightarrow d_1 \vec{y}_0 = \lambda \vec{x}_0 + L_2 \vec{x}_2 + d_1 \vec{y}_1 - L_1 \vec{x}_1$$

$$/\vec{x}_0 : \quad d_1 \vec{y}_0 \cdot \vec{x}_0 = (\lambda \vec{x}_0 + L_2 \vec{x}_2 + d_1 \vec{y}_1 - L_1 \vec{x}_1) \cdot \vec{x}_0$$

$$d_1 \vec{y}_0 \cdot \vec{x}_0 = \lambda \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0 + L_2 \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_0 + d_1 \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_0 - L_1 \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0$$

$$0 = \lambda + L_2 \cos \gamma - d_1 \sin \alpha - L_1 \cos \alpha$$

$$/\vec{y}_0 :$$



Par fermeture géométrique, déterminer le système d'équations liant λ , α , et γ aux paramètres géométriques.

Fermeture géométrique dans la boucle (0-1-2-3-0) :

$$\vec{OA} = \vec{OD} + \vec{DC} + \vec{CB} + \vec{BA} \Leftrightarrow d_1 \vec{y}_0 = \lambda \vec{x}_0 + L_2 \vec{x}_2 + d_1 \vec{y}_1 - L_1 \vec{x}_1$$

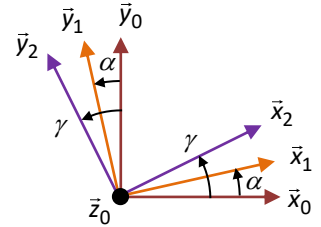
$$/\vec{x}_0 : \quad d_1 \vec{y}_0 \cdot \vec{x}_0 = (\lambda \vec{x}_0 + L_2 \vec{x}_2 + d_1 \vec{y}_1 - L_1 \vec{x}_1) \cdot \vec{x}_0$$

$$d_1 \vec{y}_0 \cdot \vec{x}_0 = \lambda \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0 + L_2 \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_0 + d_1 \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_0 - L_1 \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0$$

$$0 = \lambda + L_2 \cos \gamma - d_1 \sin \alpha - L_1 \cos \alpha$$

$$/\vec{y}_0 : \quad d_1 = 0 + L_2 \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_0 + d_1 \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_0 - L_1 \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_0 \Leftrightarrow d_1 = L_2 \sin \gamma + d_1 \cos \alpha - L_1 \sin \alpha$$

$$\text{D'où le système : } \begin{cases} \lambda = -L_2 \cos \gamma + d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha \\ d_1 = L_2 \sin \gamma + d_1 \cos \alpha - L_1 \sin \alpha \end{cases}$$



Q2 : En déduire l'expression de λ en fonction de α et des caractéristiques géométriques du système. Exprimer la valeur λ_0 prise par λ dans la configuration de repos ($\alpha = 0$).

On a :
$$\begin{cases} \lambda = -L_2 \cos \gamma + d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha \\ d_1 = L_2 \sin \gamma + d_1 \cos \alpha - L_1 \sin \alpha \end{cases}$$

Il faut éliminer l'angle γ présent dans un cos dans la première équation et un sin dans la deuxième.

→ Il faut isoler $L_2 \cos \gamma$ et $L_2 \sin \gamma$

En déduire l'expression de λ en fonction de α et des caractéristiques géométriques du système. Exprimer la valeur λ_0 prise par λ dans la configuration de repos ($\alpha = 0$).

On a :
$$\begin{cases} \lambda = -L_2 \cos \gamma + d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha \\ d_1 = L_2 \sin \gamma + d_1 \cos \alpha - L_1 \sin \alpha \end{cases}$$

Il faut éliminer l'angle γ présent dans un cos dans la première équation et un sin dans la deuxième.

→ Il faut isoler $L_2 \cos \gamma$ et $L_2 \sin \gamma$

Le paramètre à supprimer du système est l'angle γ .

$$L_2 \cos \gamma = d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha - \lambda$$

$$L_2 \sin \gamma = d_1 - d_1 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha$$

D'où :

En déduire l'expression de λ en fonction de α et des caractéristiques géométriques du système. Exprimer la valeur λ_0 prise par λ dans la configuration de repos ($\alpha = 0$).

On a :
$$\begin{cases} \lambda = -L_2 \cos \gamma + d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha \\ d_1 = L_2 \sin \gamma + d_1 \cos \alpha - L_1 \sin \alpha \end{cases}$$

| Il faut éliminer l'angle γ présent dans un cos dans la première équation et un sin dans la deuxième.

→ Il faut isoler $L_2 \cos \gamma$ et $L_2 \sin \gamma$

Le paramètre à supprimer du système est l'angle γ .

$$L_2 \cos \gamma = d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha - \lambda$$

$$L_2 \sin \gamma = d_1 - d_1 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha$$

$$\text{D'où : } L_2^2 = (d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha - \lambda)^2 + (d_1 - d_1 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha)^2$$

| On cherche à isoler λ

En déduire l'expression de λ en fonction de α et des caractéristiques géométriques du système. Exprimer la valeur λ_0 prise par λ dans la configuration de repos ($\alpha = 0$).

On a :
$$\begin{cases} \lambda = -L_2 \cos \gamma + d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha \\ d_1 = L_2 \sin \gamma + d_1 \cos \alpha - L_1 \sin \alpha \end{cases}$$

Il faut éliminer l'angle γ présent dans un cos dans la première équation et un sin dans la deuxième.

→ Il faut isoler $L_2 \cos \gamma$ et $L_2 \sin \gamma$

Le paramètre à supprimer du système est l'angle γ .

$$L_2 \cos \gamma = d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha - \lambda$$

$$L_2 \sin \gamma = d_1 - d_1 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha$$

$$\text{D'où : } L_2^2 = (d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha - \lambda)^2 + (d_1 - d_1 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha)^2$$

On cherche à isoler λ

Ici, il ne faut surtout pas développer !

$$\Leftrightarrow (d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha - \lambda)^2 = L_2^2 - (d_1 - d_1 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha)^2 \Rightarrow d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha - \lambda = \pm \sqrt{L_2^2 - (d_1 - d_1 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha)^2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha \pm \sqrt{L_2^2 - (d_1 - d_1 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha)^2}$$

La solution retenue est ?

En déduire l'expression de λ en fonction de α et des caractéristiques géométriques du système. Exprimer la valeur λ_0 prise par λ dans la configuration de repos ($\alpha = 0$).

On a :
$$\begin{cases} \lambda = -L_2 \cos \gamma + d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha \\ d_1 = L_2 \sin \gamma + d_1 \cos \alpha - L_1 \sin \alpha \end{cases}$$

| Il faut éliminer l'angle γ présent dans un cos dans la première équation et un sin dans la deuxième.

→ Il faut isoler $L_2 \cos \gamma$ et $L_2 \sin \gamma$

Le paramètre à supprimer du système est l'angle γ .

$$L_2 \cos \gamma = d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha - \lambda$$

$$L_2 \sin \gamma = d_1 - d_1 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha$$

$$\text{D'où : } L_2^2 = (d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha - \lambda)^2 + (d_1 - d_1 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha)^2$$

| On cherche à isoler λ

| Ici, il ne faut surtout pas développer !

$$\Leftrightarrow (d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha - \lambda)^2 = L_2^2 - (d_1 - d_1 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha)^2 \Rightarrow d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha - \lambda = \pm \sqrt{L_2^2 - (d_1 - d_1 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha)^2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha \pm \sqrt{L_2^2 - (d_1 - d_1 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha)^2}$$

La solution retenue correspond au λ le plus petit : $\lambda = d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha - \sqrt{L_2^2 - (d_1 - d_1 \cos \alpha + L_1 \sin \alpha)^2}$

Q3 : Linéariser le système d'équations obtenu question 1 et exprimer $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ et γ en fonction de α .

α et γ sont petits.

$$\begin{cases} \lambda = -L_2 \cos \gamma + d_1 \sin \alpha + L_1 \cos \alpha \\ d_1 = L_2 \sin \gamma + d_1 \cos \alpha - L_1 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \simeq -L_2 + d_1 \alpha + L_1 \\ d_1 \simeq L_2 \gamma + d_1 - L_1 \alpha \end{cases} .$$

La première équation donne : $\Delta\lambda \simeq d_1 \alpha$

Q4 : Déterminer $y(t)$ en fonction de α , puis, après linéarisation, en fonction de $\Delta\lambda$ et des caractéristiques géométriques du système.

$$y(t) = \overline{AE} \cdot \vec{y}_0 = (L_1 \vec{x}_1 + L_4 \vec{x}_4) \cdot \vec{y}_0 = L_1 \sin \alpha + L_4 \sin \alpha$$

$$\alpha \text{ est supposé petit, d'où : } y(t) \simeq L_1 \alpha + L_4 \alpha \simeq (L_1 + L_4) \alpha \simeq \frac{L_1 + L_4}{d_1} \Delta\lambda$$

Q5 : Déterminer $\Delta\lambda$ pour obtenir un déplacement y de 5 mm. Conclure sur l'hypothèse de petit déplacement.

Avec $\beta = 0$, $\Delta\lambda = \frac{d_1}{L_1 + L_4} y = 0,465 \text{ mm}$

Pour cette valeur, $\alpha = \frac{\Delta\lambda}{d_1} = 0,015 \text{ rad}$, angle effectivement « petit » permettant de confondre le cosinus avec l'unité et l'angle avec le sinus de l'angle.

| $\cos(0,015) = 0,99988$ et $\sin(0,015) = 0,014999$