

exo 7: 1) Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \neq 0$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Puis: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

On calcule que $f(0) = \frac{1}{1+0} = 1$ et que, puisque $x^2 \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} +\infty$,

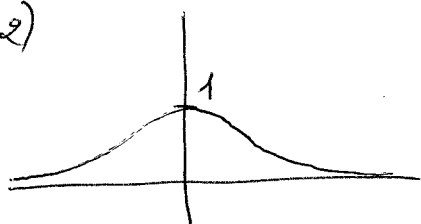
on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} f = 0$.

On obtient donc le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
f	0	1	0

(on pourrait aussi remarquer que f est paire, l'étudier sur $\mathbb{R}^+$ uniquement, puis compléter par symétrie)

2)



3) Par lecture graphique, il semble que $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow]0, 1]$ soit une bijection (ou aussi $f: \mathbb{R}^- \rightarrow]0, 1]$).

4) Montrons que $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow]0, 1]$ est une bijection et déterminons sa bijection réciproque.

Soit $y \in]0, 1]$, on veut, pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} = y \Leftrightarrow 1+x^2 = \frac{1}{y} \quad (\text{correct car } y \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y} - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{y} - 1} \quad (\text{correct car } x \geq 0 \text{ et que } \frac{1}{y} - 1 \geq 0 \text{ car } \frac{1}{y} \geq 1 \text{ car } 0 < y \leq 1)$$

On obtient une unique solution donc f est bien bijective et

$$f^{-1}:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ : y \mapsto \sqrt{\frac{1}{y} - 1}$$