

Exercice 1

Démontrer les identités suivantes :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y).$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y).$

Exercice 2

Représenter les graphes des fonctions suivantes dans un repère orthonormé (vérifier ensuite votre résultat sur calculatrice, Geogebra, ou Python).

- | | |
|----------------------------|--------------------------------------|
| 1. $f : x \mapsto -e^x$ | 3. $h : x \mapsto 2 + \frac{1}{x+2}$ |
| 2. $g : x \mapsto \ln(-x)$ | 4. $k : x \mapsto \cos(x)e^x$ |

Exercice 3

On considère les fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} f : D_f \longrightarrow \mathbb{R} & g : D_g \longrightarrow \mathbb{R} \\ : x \longmapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & : x \longmapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \end{array}$$

1. Déterminer leurs ensembles de définition D_f et D_g .
2. Les fonctions f et g sont-elles paires ? impaires ?
3. Vérifier vos réponses en traçant les graphes de f et de g sur Geogebra : <https://www.geogebra.org/classic?lang=fr>

Exercice 4

On souhaite faire l'étude de la fonction $f : x \mapsto e^{\cos(x)}$.

1. Expliquer pourquoi il est suffisant d'étudier f sur $[0, \pi]$ et expliquer comment obtenir le graphe de f sur $\mathbb{R}$ à partir de celui sur $[0, \pi]$.
2. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$. Préciser ensuite les limites et les tangentes de f en 0 et en π .
3. Tracer l'allure du graphe de f puis vérifier votre résultat sur Geogebra : <https://www.geogebra.org/classic?lang=fr>

Exercice 5

Faire l'étude des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \ln(-2x^2 + x + 1)$. On rappelle que $\lim_{y \rightarrow 0} \ln(y) = \dots$

$$2. g : x \mapsto \frac{x^3 - 2x}{3 - x^2}$$

$$3. h : x \mapsto \sqrt{\frac{2 - e^x}{e^{2x} - 9}}$$

$$4. f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Pour la limite de f en $+\infty$, on écrira $f(x) = \frac{1 - e^{ax}}{1 + e^{ax}}$ pour un nombre a à déterminer.

$$5. g : x \mapsto \sqrt{-x^4 + x^2 + 6}$$

Exercice 6

On considère la fonction $f : x \mapsto \cos(3x) \cos^3(x)$.

1. Montrer que f est paire et π -périodique. Sur quel intervalle I peut-on se contenter d'étudier f ?
2. Montrer que pour $x \in I$, $f'(x)$ est du signe de $-\sin(4x)$.
3. En déduire le signe de f' sur I et dresser le tableau de variations de f sur I .
4. Tracer le graphe de f sur son ensemble de définition.

Exercice 7

Montrer par étude de fonction que :

1. $\forall x \geq 0, \operatorname{sh}(x) \geq x$
2. $\forall x \geq 0, \sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$

Exercice 8

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes. On vérifiera ses résultats (sans tricher !) en traçant les graphes des fonctions en jeu sur Geogebra : <https://www.geogebra.org/classic?lang=fr>.

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{2\cos(x)-1}$.
2. Montrer par étude de fonction que : $\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Exercice 9

Dans cet exercice, on demande de démontrer les résultats en revenant à la définition de la partie entière (qu'il faut donc connaître !).

1. Déterminer la partie entière de $\sqrt{33}$.
2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.

Exercice 10

1. Dans cette question, on cherche à montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$.
 - (a) Vérifier que cette formule est vraie pour $x = 3, 2$ puis pour $x = 3, 8$.
 - (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on écrit : $x = \lfloor x \rfloor + t$ avec $t \in [0, 1[$. Exprimer $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$. On distinguera deux cas en fonction de la valeur de t .
 - (c) Dans chacun des cas précédents, exprimer $\lfloor 2x \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.
 - (d) Conclure.
2. Un raisonnement similaire à celui de la première question permet de montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{3} \rfloor + \lfloor x + \frac{2}{3} \rfloor.$$

On propose de démontrer ce résultat d'une autre manière.

On définit $f : x \mapsto \lfloor 3x \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor x + \frac{1}{3} \rfloor - \lfloor x + \frac{2}{3} \rfloor$.

- (a) Montrer que f est $\frac{1}{3}$ -périodique.
- (b) Montrer que f est nulle sur $[0, \frac{1}{3}[$.
- (c) Conclure.

Exercice 11

Associez chaque fonction à son graphe. Justifiez votre réponse en identifiant des propriétés satisfaites par les fonctions proposées et les manifestations de ces propriétés sur leurs graphes.

1. $x \mapsto (x-1)^2 + 1$

2. $x \mapsto (x+1)^2 - 1$

3. $x \mapsto \cos(x + \frac{\pi}{4})$

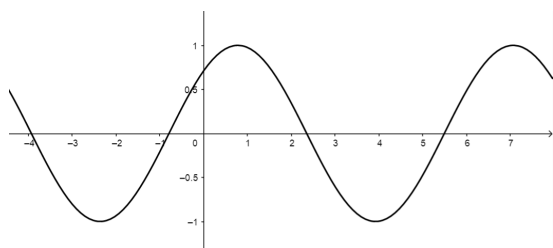
4. $x \mapsto \cos(x - \frac{\pi}{4})$

5. $x \mapsto \sin(x^2)$

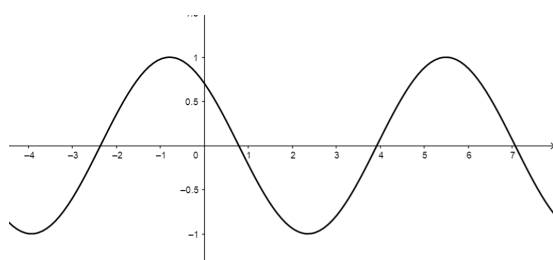
6. $x \mapsto \sin(x^3)$

7. $x \mapsto \ln(x) + 1$

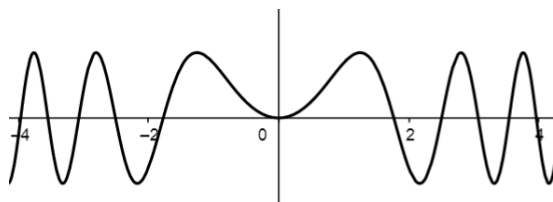
8. $x \mapsto \sqrt{x}$



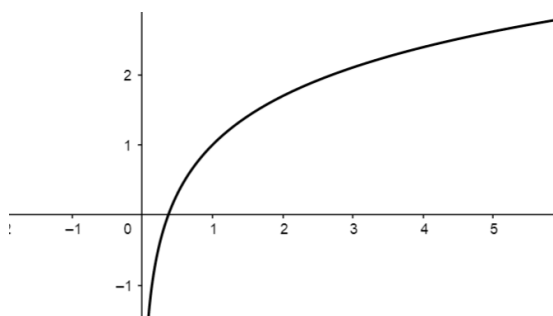
(a)



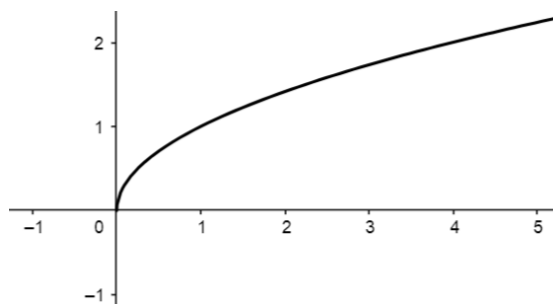
(b)



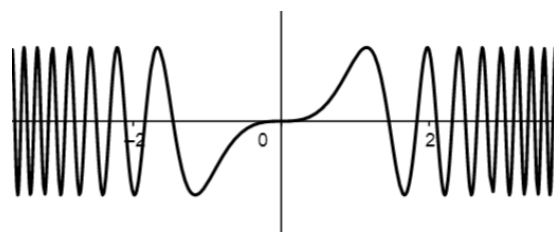
(c)



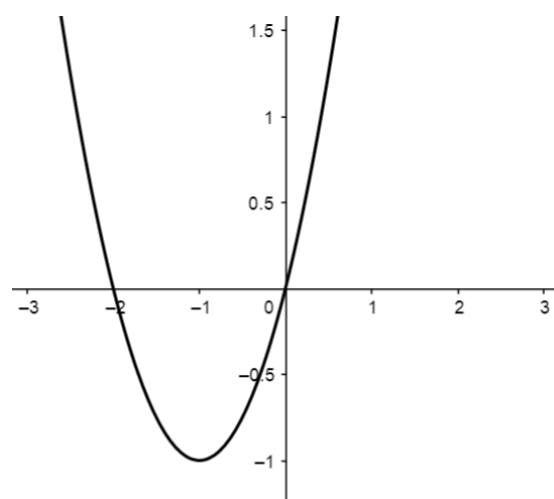
(d)



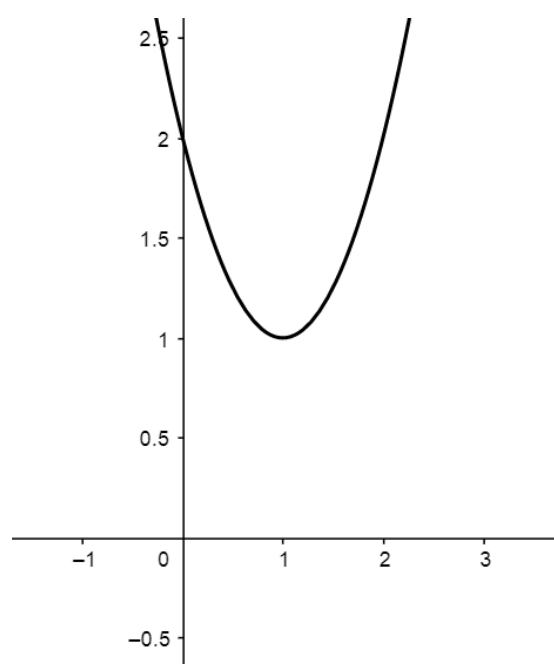
(e)



(f)



(g)



(h)