

DS n°1 : Automatisme

PCSI — Corrigé

Cours 1 : Système linéaire continu et invariant (SLCI)

Un SLCI est un système qui est à la fois :

- **Linéaire** : il respecte le principe de superposition (proportionnalité et additivité). Si l'entrée $e_1(t)$ donne la sortie $s_1(t)$ du système et l'entrée $e_2(t)$ donne $s_2(t)$ du système, alors l'entrée $\lambda e_1(t) + \mu e_2(t)$ donne la sortie $\lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$.
- **Continu** : les grandeurs d'entrée et de sortie sont définies et évoluent à tout instant t (signaux continus dans le temps, par opposition aux systèmes discrets / échantillonnés).
- **Invariant** : ses caractéristiques (masse, raideur, résistance...) ne varient pas au cours du temps. Une même entrée appliquée à deux instants différents produit la même sortie, simplement décalée dans le temps (« le système ne vieillit pas »)

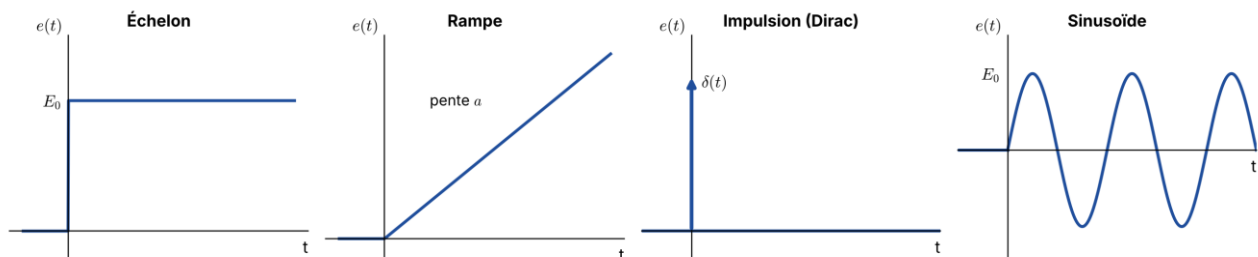
Un SLCI est modélisé généralement par une **équation différentielle linéaire à coefficients constants** :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

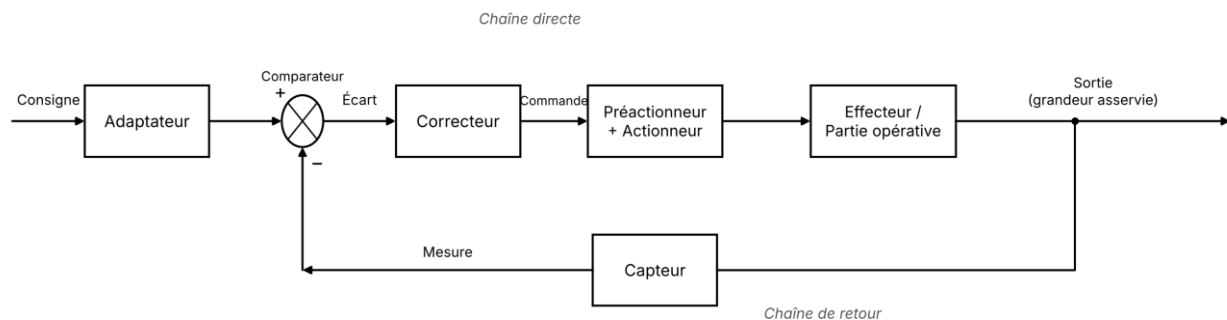
Cours 2 : Signaux canoniques d'entrée

- **Échelon** : $e(t) = E_0 \cdot u(t)$ (échelon unitaire $u(t)$ si $E_0 = 1$) ; $e(t) = 0$ pour $t < 0$.
- **Rampe** : $e(t) = a \cdot t \cdot u(t)$; pente a .
- **Impulsion de Dirac** : $\delta(t)$, signal de durée infiniment courte et d'aire unité.
- **Sinusoïde** : $e(t) = E_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot u(t)$.

(Trois signaux suffisaient.)



Cours 3 : Schéma fonctionnel d'un système asservi



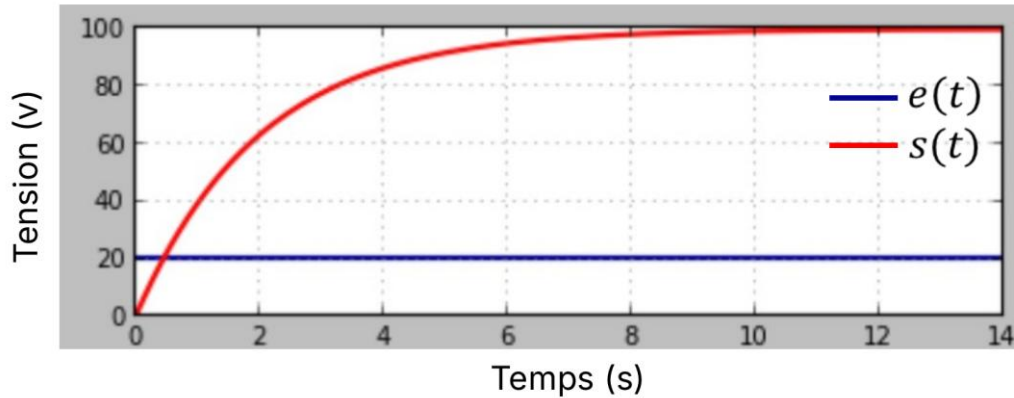
Exercice 1 : Système du 1er ordre

a) Forme canonique d'un 1er ordre

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

avec K le gain statique (unité de s / unité de e) et τ la constante de temps (en s), $\tau > 0$.

b) Identification à partir de la réponse indicielle (échelon de 20 V)



Gain statique K . En régime permanent, $s(\infty) = K \cdot E_0$. On lit $s(\infty) = 100 \text{ V}$ pour $E_0 = 20 \text{ V}$:

$$K = \frac{s(\infty)}{E_0} = \frac{100}{20} = 5$$

Constante de temps τ . La solution est $s(t) = KE_0(1 - e^{-t/\tau})$. À $t = \tau$, $s(\tau) = (1 - e^{-1})KE_0 \approx 0,63 \cdot KE_0$.

On cherche donc l'instant où $s(t) = 0,63 \times 100 = 63 \text{ V}$: on lit $t \approx 2 \text{ s}$.

$$\tau = 2 \text{ s}$$

Méthode plus précise en utilisant le temps de réponse à 5 % vaut $t_{5\%} = 3\tau = 6 \text{ s}$: on lit bien $s(6) \approx 95 \text{ V}$.

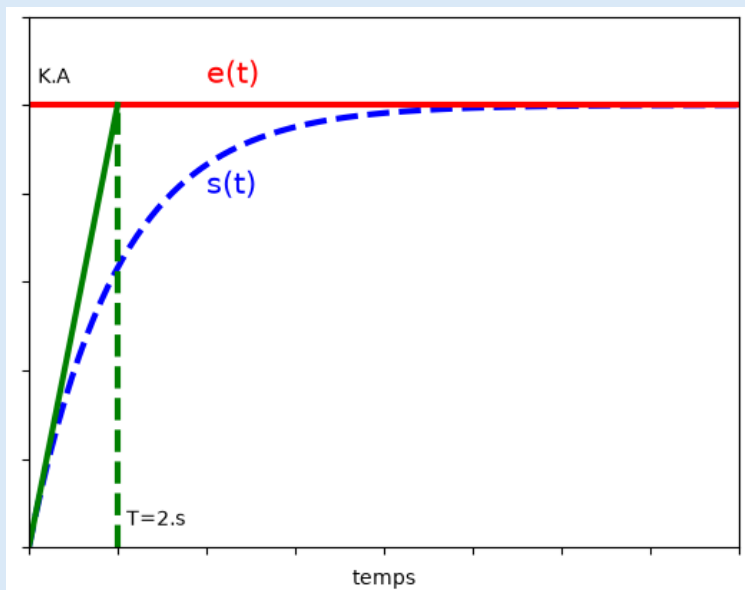
L'équation différentielle du système est donc :

$$2 \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 5 \cdot e(t)$$

c) Réponse à un échelon unitaire (1 V)

$$s(t) = 5(1 - e^{-t/2}) \cdot u(t)$$

- **Valeur finale** : $s(\infty) = K \times 1 = 5 \text{ V}$.
- **Tangente à l'origine** : pente $\frac{K}{\tau} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ V/s}$; elle coupe l'asymptote $s = 5 \text{ V}$ en $t = \tau = 2 \text{ s}$.
- $s(\tau) = s(2 \text{ s}) \approx 3,16 \text{ V}$ (63 %) et $t_{5\%} = 6 \text{ s}$ ($s \approx 4,75 \text{ V}$).



Exercice 2 : Réponse à une rampe

Équation : $\frac{ds(t)}{dt} + 2s(t) = 2e(t)$ avec $e(t) = 3t \cdot u(t)$ et $s(0) = 0$.

a) Résolution (sans Laplace)

Solution générale de l'équation homogène : $\frac{ds(t)}{dt} + 2s(t) = 0 \Rightarrow s_h(t) = A \cdot e^{-2t}$.

Solution particulière : le second membre $2e(t) = 6t$ est un polynôme de degré 1, on cherche $s_p(t) = \alpha t + \beta$:

$$\alpha + 2(\alpha t + \beta) = 6t \Rightarrow 2\alpha = 6 \text{ et } \alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 3, \quad \beta = -\frac{3}{2}$$

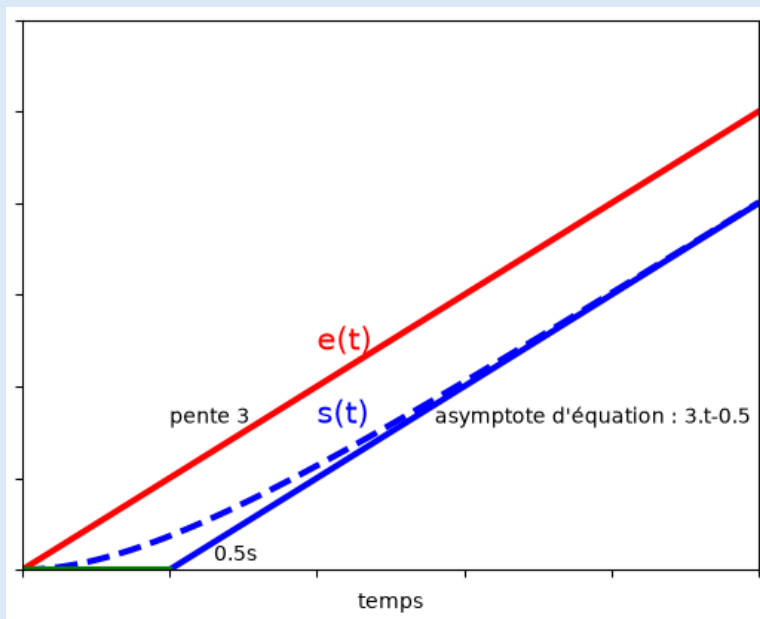
Solution complète : $s(t) = Ae^{-2t} + 3t - \frac{3}{2}$. Avec $s(0) = 0 : A - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow A = \frac{3}{2}$.

$$s(t) = \left(3t - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t}\right) \cdot u(t)$$

b) Tracé de $e(t)$ et $s(t)$ — grandeurs caractéristiques

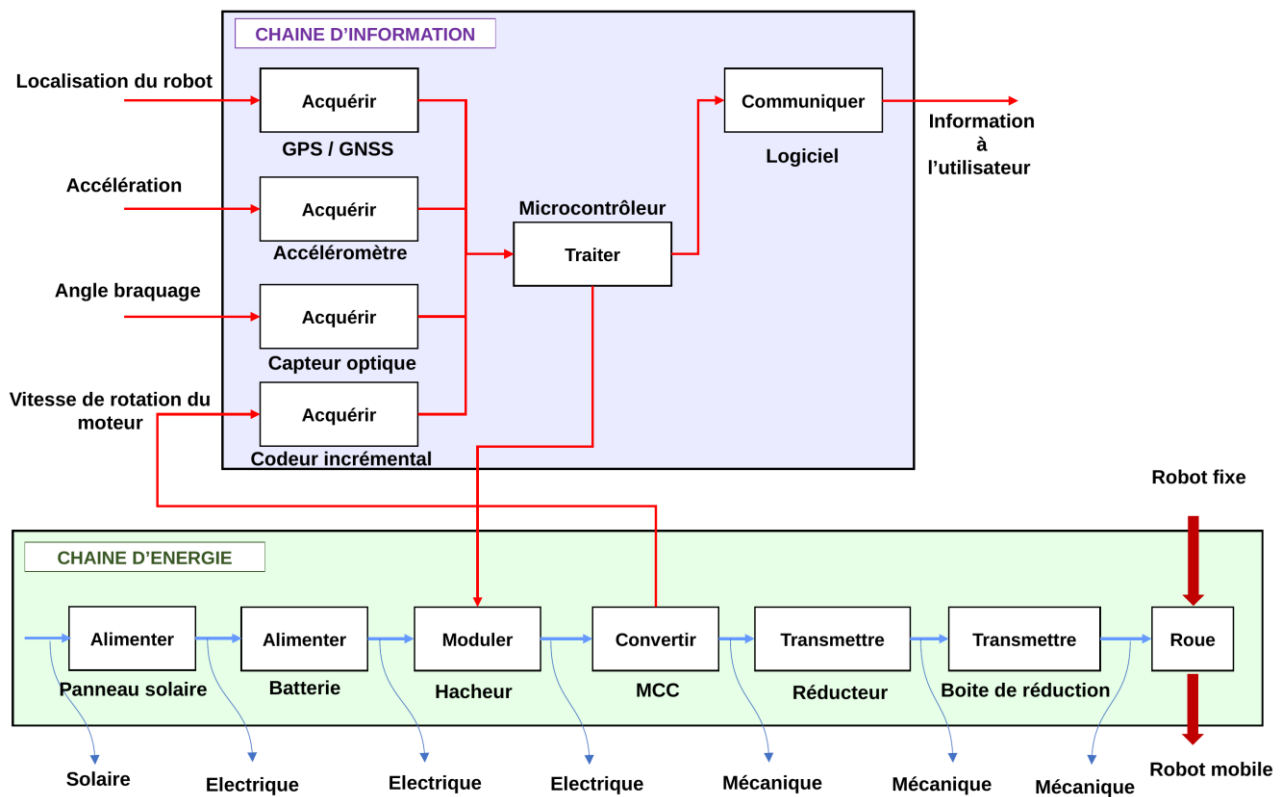
Mise sous forme canonique : $\frac{1}{2} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$: premier ordre de gain $K = 1$ et de constante de temps $\tau = 0,5 \text{ s}$.

- **Pente à l'origine :** $\frac{ds}{dt}(t) = 3 - 3e^{-2t} \Rightarrow \frac{ds}{dt}(0) = 0$: **tangente horizontale** à l'origine.
- **Asymptote :** quand $t \rightarrow \infty$, $e^{-2t} \rightarrow 0$ donc $s(t) \rightarrow 3t - 1,5$. L'asymptote $y = 3t - 1,5$ est parallèle à l'entrée (même pente 3, car $K = 1$).
- **Traînage :** l'écart vertical en régime permanent vaut $e(t) - s(t) \rightarrow 1,5$ ($= K\alpha\tau$ avec $\alpha = 3$) ; l'asymptote coupe l'axe des temps en $t = \tau = 0,5 \text{ s}$ (retard de traînage $= \tau$).



Exercice 3 : Chaîne d'énergie / chaîne d'information du Vitrover

a) et b) Constituants, fonctions et énergies entrantes / sortantes



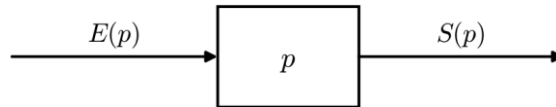
Exercice 4 : Transformée de Laplace et fonctions de transfert

Conditions initiales nulles : $\mathcal{L}\left(\frac{d^n s(t)}{dt^n}\right) = p^n S(p)$.

a)

$$s(t) = \frac{de(t)}{dt} \Rightarrow S(p) = p \cdot E(p)$$

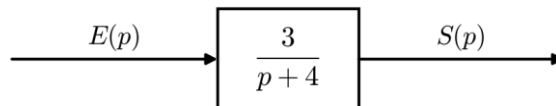
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = p$$



b)

$$\frac{ds(t)}{dt} + 4s(t) = 3e(t) \Rightarrow (p + 4)S(p) = 3E(p)$$

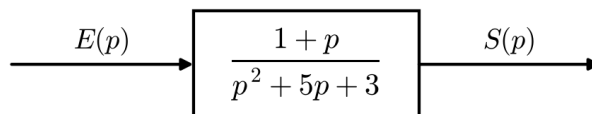
$$H(p) = \frac{3}{p + 4}$$



c)

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 5 \frac{ds(t)}{dt} + 3s(t) = e(t) + \frac{de(t)}{dt} \Rightarrow (p^2 + 5p + 3)S(p) = (1 + p)E(p)$$

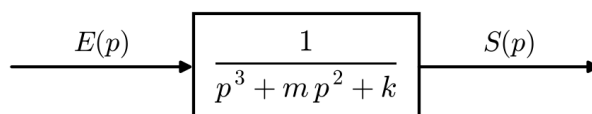
$$H(p) = \frac{1 + p}{p^2 + 5p + 3}$$



d)

$$\frac{d^3 s(t)}{dt^3} + m \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + k \cdot s(t) = e(t) \Rightarrow (p^3 + mp^2 + k)S(p) = E(p)$$

$$H(p) = \frac{1}{p^3 + mp^2 + k}$$



Exercice 5 : Des schémas-blocs aux équations différentielles

On écrit $S(p) = H(p) \cdot E(p)$, on fait le produit en croix puis on repasse dans le domaine temporel ($p \cdot X(p) \rightarrow \frac{dx}{dt}$, conditions initiales nulles).

a)

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{3}{1+2p} \Rightarrow (1+2p)S(p) = 3E(p)$$

$$2 \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 3e(t)$$

b)

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1+2p}{p+p^2} \Rightarrow (p^2+p)S(p) = (1+2p)E(p)$$

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{ds(t)}{dt} = e(t) + 2 \frac{de(t)}{dt}$$

c)

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{5}{1+2p+2p^2} \Rightarrow (2p^2+2p+1)S(p) = 5E(p)$$

$$2 \frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2 \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 5e(t)$$

Exercice 6 : Modélisation d'une enceinte chauffante

a) Passage dans le domaine de Laplace (conditions initiales nulles)

Vanne : $q(t) = k_0 \alpha(t) \Rightarrow Q(p) = k_0 A(p)$

$$H_1(p) = \frac{Q(p)}{A(p)} = k_0$$

Échangeur : $\theta_1(t) + \tau_1 \frac{d\theta_1(t)}{dt} = k_1 q(t) \Rightarrow (1 + \tau_1 p) \theta_1(p) = k_1 Q(p)$

$$H_2(p) = \frac{\theta_1(p)}{Q(p)} = \frac{k_1}{1 + \tau_1 p}$$

Enceinte : $\theta(t) + \tau_2 \frac{d\theta(t)}{dt} = k_2 \theta_1(t) \Rightarrow (1 + \tau_2 p) \theta(p) = k_2 \theta_1(p)$

$$H_3(p) = \frac{\theta(p)}{\theta_1(p)} = \frac{k_2}{1 + \tau_2 p}$$

b) Schéma-bloc du système

