

Programme de colles : semaine 4, du 12/10 au 16/10

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Applications

Dans tout ce qui suit $f : E \longrightarrow F$. On ne fait pas de distinction entre fonction et application. **Le théorème de la bijection ainsi que les fonctions trigonométriques réciproques n'ont pas été abordés dans ce chapitre.**

- notion d'application, ensembles de définition et d'arrivée, image et antécédent, représentation graphique dans le cas d'une fonction numérique. On note F^E l'ensemble des fonctions de E dans F
- composition, on note id_E la fonction identité sur E
- image directe $f(A)$ d'un ensemble $A \subset E$ et image réciproque $f^{-1}(B)$ d'un ensemble $B \subset F$. On note $Im(f) = f(E)$
- injectivité/surjectivité : savoir montrer qu'une fonction est ou n'est pas injective/surjective.
- la fonction $f : E \longrightarrow Im(f)$ est toujours surjective
- bijectivité : savoir montrer qu'une fonction f est bijective en montrant que pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x \in E$
- on note $f^{-1} : F \longrightarrow E$ la bijection réciproque d'une bijection $f : E \longrightarrow F$. Savoir déterminer l'expression d'une bijection réciproque en résolvant pour $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$
- si $f : E \longrightarrow F$ est bijective alors on a $f \circ f^{-1} = id_F$ et $f^{-1} \circ f = id_E$.
- soit $f : E \longrightarrow F$. Si $g : F \longrightarrow E$ est telle que $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$ alors f est bijective et $g^{-1} = f$. En particulier, $(f^{-1})^{-1} = f$
- si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont bijectives alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- graphe de f^{-1} en fonction du graphe de f

2 Études de fonctions

On insistera sur la différence entre f et $f(x)$. Les fonctions trigonométriques réciproques et la dérivée d'une bijection réciproque ne sont pas

au programme cette semaine, la fonction $\tanh$ et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.

- ensemble de définition et d'arrivée
- opérations, composition
- fonctions monotones, strictement monotones
- fonctions paires, impaires, périodiques
- lien entre dérivée et sens de variation
- équation de la tangente au graphe en un point
- fonctions usuelles : pour chacune des fonctions suivantes, connaître : les ensembles de définition et d'arrivée, la dérivée, le sens de variation, les limites, les éventuelles parité et périodicité, l'allure du graphe :
 1. logarithme, logarithme de base a
 2. exponentielle, exponentielle de base a .

$\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, a^b = \exp(b \ln(a))$
 3. cosinus, sinus, tangente
 4. fonctions puissances $x \longmapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$
 5. valeur absolue
 6. sinus et cosinus hyperboliques
- schéma d'étude d'une fonction :
 1. ensemble de définition
 2. restriction de l'ensemble d'étude par parité et/ou périodicité
 3. ensemble de dérivabilité
 4. calcul de la dérivée
 5. recherche du signe de la dérivée
 6. tableau de variations
 7. limites et valeurs d'intérêt. *Les calculs de limites (notamment les formes indéterminées) n'ont pas été revus en classe. Les élèves ne doivent pas hésiter à demander de l'aide pour calculer une limite.*
 8. allure du graphe
- obtention d'inégalités par étude de fonction.
- fonctions majorées, minorées, bornées
- notion d'extremum global/local. *Seule la définition et l'interprétation graphique ont été abordées en classe.*

3 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Donner la définition de l'image directe et de l'image réciproque d'un ensemble par une fonction.
2. Soit $f : E \longrightarrow F$. Donner la définition de " f est injective" et/ou de " f est surjective" et/ou de " f est bijective".
3. Donner, en justifiant, un exemple de fonction qui soit à la fois (non) surjective et (non) injective (*avec des parenthèses choisies par l'examineur*).
4. Démontrer que la composée de deux injections (ou de deux surjections) est une injection (ou une surjection).
5. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions ; donner et démontrer le sens de variation de $g \circ f$ si on suppose que f est (dé)croissante et g (dé)croissante sur $\mathbb{R}$ (*avec des parenthèses choisies par l'examineur*).
6. Démontrer que la fonction nulle est la seule fonction à la fois paire et impaire.
7. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a . Donner l'équation de la tangente au graphe de f en a . Appliquer ensuite cette formule sur un exemple simple choisi par l'examineur.
8. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Démontrer que f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.
9. Démontrer par une étude de fonction que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, e^x \geq 1 + x$.
10. Présenter une ou deux fonctions usuelles parmi : $x \longmapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, inverse, racine carrée, logarithme, exponentielle, $x \longmapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, cosinus, sinus, tangente, valeur absolue, cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique.

Pas de question de calcul "type révision" cette semaine.

La question de cours est noté sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.