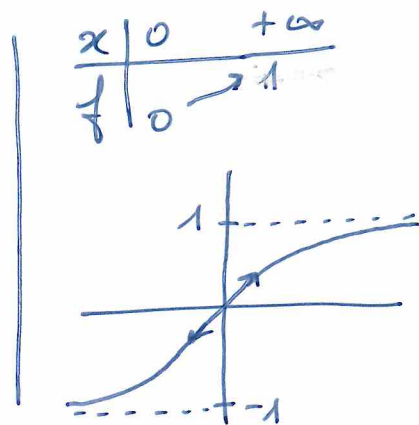


TD 5 : exo 5

- 4) Comme : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + e^{-x} > 0$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -f(x)$
dmc f est impaire : on l'étudie sur $\mathbb{R}^+$
 - $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} + e^{-2x} - 2)}{(e^x + e^{-x})^2}$
$$= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$$
 - $f(0) = 0$ car f est impaire
 - $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$
car $e^{-2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. D'où le tableau de variations et le graphe ci-contre.



- 5) On résout pour $x \in \mathbb{R}$:
- $$-x^4 + x^2 + 6 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ -y^2 + y + 6 \geq 0 \end{cases} (*)$$

Après calcul, les racines de $-X^2 + X + 6$ sont 3 et -2, de sorte que, puisque son coefficient dominant est négatif :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ -2 \leq y \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x^2 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$$

Ainsi g est définie sur $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, cet ensemble est symétrique par rapport à 0 et
 $\forall x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}], g(-x) = \sqrt{-(-x)^4 + (-x)^2 + 6} = \sqrt{-x^4 + x^2 + 6} = g(x)$ dmc g est paire : on l'étudie sur $[0, \sqrt{3}]$

Par un calcul similaire à celui ci-dessus, on trouve que

$$-x^4 + x^2 + 6 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

dmc g est dérivable sur $] -\sqrt{3}, \sqrt{3} [$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in] -\sqrt{3}, \sqrt{3} [, g'(x) &= \frac{-4x^3 + 2x}{2\sqrt{-x^4 + x^2 + 6}} \\ &= \frac{x(1 - 2x^2)}{\sqrt{-x^4 + x^2 + 6}} \end{aligned}$$

Redoublons pour $x \in [0, \sqrt{3}[$,

$$\begin{aligned} g'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow 1 - 2x^2 \geq 0 \quad (\text{car } x \geq 0 \text{ et } \sqrt{\dots} > 0) \\ &\Leftrightarrow x^2 \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{car } x \geq 0) \end{aligned}$$

On calcule que

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dots = \frac{5}{2}, \quad g(0) = \sqrt{6} \text{ et } g(\sqrt{3}) = 0$$

De plus on remarque que $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} g'(x) = -\infty$ dmc on a une tangente verticale en $\sqrt{3}$.

Finalement on obtient :

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{3}$
$g'(x)$	0	+	-
g	$\sqrt{6}$	$\frac{5}{2}$	0

