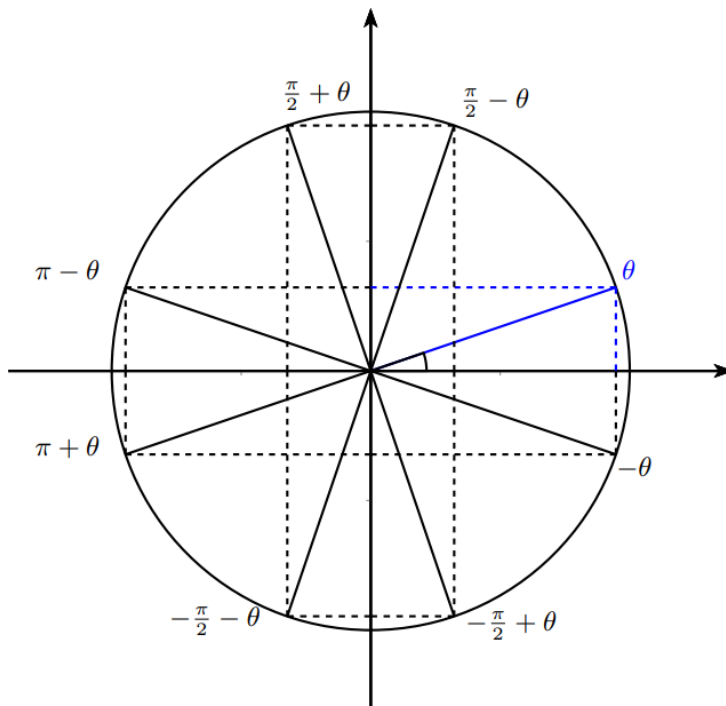


Feuille de cours 6 : trigonométrie

1 Tourner autour du cercle

On retrouve les formules suivantes en utilisant les symétries du cercle trigonométrique et le fait que :

- passer de θ à $\theta + \frac{\pi}{2}$ correspond à une rotation d'un quart de tour,
- passer de θ à $\theta + \pi$ correspond à une rotation d'un demi tour (i.e. à une symétrie centrale par rapport à l'origine),
- passer de θ à $-\theta$ correspond à une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses.



Proposition 1

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cos(\theta + 2\pi) =$$

Par conséquent pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\cos(\theta + 2k\pi) =$$

$$\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) =$$

$$\cos(\theta + \pi) =$$

$$\cos(-\theta) =$$

$$\sin(\theta + 2\pi) =$$

Par conséquent pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sin(\theta + 2k\pi) =$$

$$\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) =$$

$$\sin(\theta + \pi) =$$

$$\sin(-\theta) =$$

Exercice 1

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cos(\pi - \theta) =$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) =$$

$$\cos(\theta - \pi) =$$

$$\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) =$$

$$\sin(\pi - \theta) =$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) =$$

$$\sin(\theta - \pi) =$$

$$\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) =$$

Proposition 2

Pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ on a :

$$\tan(\theta + \pi) =$$

Par conséquent pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\tan(\theta + k\pi) =$$

$$\tan(-\theta) =$$

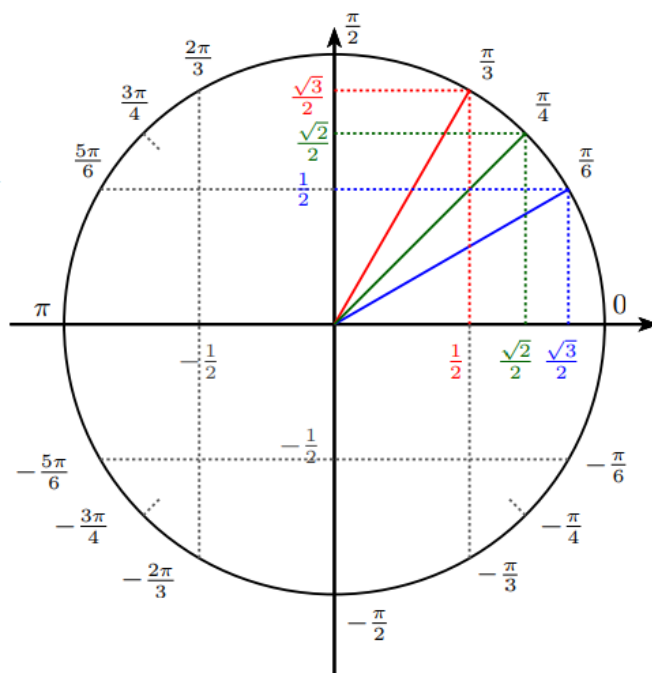
Pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) =$$

2 Valeurs particulières

Quelques mesures à connaître (en s'aidant du cercle)

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Démonstration des valeurs usuelles :

- Les valeurs pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ ne posent pas de difficultés.
- Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, on est sur la droite d'équation $y = x$ donc on a $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$. Par conséquent, $1 = \cos^2(\frac{\pi}{4}) + \sin^2(\frac{\pi}{4}) = 2\cos^2(\frac{\pi}{4})$ donc $\cos^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$. Comme de plus $\cos(\frac{\pi}{4}) \geq 0$ on a finalement, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, c'est l'angle d'un triangle équilatéral ! Si on note O l'origine du repère, A le point de coordonnées $(1, 0)$ et M le point repéré par l'angle $\frac{\pi}{3}$, alors OAM est équilatéral. Ainsi, si on note H le projeté orthogonal de M sur $[OA]$, la hauteur $[MH]$ coupe le côté $[OA]$ en son milieu : $OH = \frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{3})$. Enfin comme $\sin(\frac{\pi}{3}) \geq 0$, on a $\sin(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{1 - \cos^2(\frac{\pi}{3})} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Pour $\theta = \frac{\pi}{6}$, on raisonne similairement dans le triangle équilatéral correspondant.

□

On en déduit les autres cosinus et sinus usuels en se repérant sur le cercle. Par exemple, $\cos(-\frac{3\pi}{4}) =$ et $\sin(\frac{5\pi}{6}) =$.

Exercice 2

Déterminer les valeurs suivantes :

1. $\cos(\frac{-5\pi}{6}) =$

2. $\sin(\frac{7\pi}{4}) =$

3. $\tan(\frac{2\pi}{3}) =$

4. $\cos(\frac{-8\pi}{3}) =$

5. $\sin(\frac{11\pi}{2}) =$

6. $\tan(\frac{9\pi}{4}) =$