

Mathématiques - samedi 10 octobre 2026

Devoir n°1 Durée : 4h

- Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.
- Les qualités de rédaction (clarté des raisonnements, lisibilité, orthographe...) et le respect des consignes de présentation (encadrement, pagination...) représenteront entre 5 et 10% de la note finale.
- Le sujet comporte 2 pages et 5 exercices.

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x - y + z, 2x - z, x + y - z).$$

Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 2.

On considère l'équation (E) suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E) : \lfloor 2x - \sqrt{5x - 1} \rfloor = 0$$

1. Déterminer le domaine de définition D de (E) .
2. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, démontrer que : $\lfloor a - b \rfloor = 0 \iff a - 1 < b \leq a$.
3. Résoudre (E) .

Exercice 3.

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie par $f : x \mapsto \frac{\ln(x) + 1}{\ln(x) - 1}$ où x désigne un nombre réel.

Partie A : Fonction auxiliaire

On définit la fonction suivante :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \setminus \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ t &\mapsto \frac{t+1}{t-1} \end{aligned}$$

1. Justifier que g est bien définie.
2. Démontrer que g est bijective et déterminer sa réciproque.
3. Etudier les variations de g .

Partie B : Etude de f

4. Déterminer l'ensemble de définition D de f .
5. Montrer que $f = g \circ u$ avec u une application à déterminer.
6. Donner sans justifier l'image $f(D)$ de la fonction f .
7. En utilisant une propriété de la fonction u , démontrer que f est bijective de D dans $f(D)$ et déterminer sa réciproque.

Exercice 4.

Dans tout l'exercice, on fixe $a \in]0, 1[$. On considère la fonction f_a donnée par :

$$f_a : x \mapsto \ln \left(e^{2x} + \frac{a}{4} \right).$$

1. Faire l'étude complète de f_a .
2. Montrer que l'équation $f_a(x) = x$ a deux solutions sur $\mathbb{R}$ et que ces deux solutions sont négatives.

On considère ensuite la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_a(u_n).$$

3. Calculer u_1 .
4. En utilisant la question 1, démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.
5. En utilisant la question 2, en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. *On pourra utiliser sans démonstration qu'une suite croissante est soit convergente soit tend vers $+\infty$.*

Exercice 5.

Pour tout ensemble fini $A \subset \mathbb{N}^*$, on note $s(A)$ la somme de tous les éléments de A . Par exemple, $s(\{2, 5, 6\}) = 2 + 5 + 6 = 13$. On pose de plus par convention $s(\emptyset) = 0$. Cela définit une application $s : \mathcal{P}_f(\mathbb{N}^*) \rightarrow \mathbb{N}$ où $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}^*)$ désigne l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}^*$.

1. (a) Donner sans justification l'ensemble des antécédents de 6 par s .
(b) L'application s est-elle injective ? surjective ? Justifier.
2. Écrire en extension l'ensemble $K = \{A \subset \llbracket 1, 4 \rrbracket \mid s(A) \leq 5\}$.
3. (a) Justifier brièvement que pour A et B deux parties finies de $\mathbb{N}^*$ on a :

$$A \subset B \implies s(A) \leq s(B).$$

- (b) Montrer que l'implication réciproque est fausse.
- (c) Soit $n \geq 2$ un entier. On note $S = \{s(A), A \subset \llbracket 1, n \rrbracket\}$. Montrer que

$$\llbracket 0, 2n-1 \rrbracket \subset S \subset \llbracket 0, \frac{n(n+1)}{2} \rrbracket.$$

4. Soit $n \geq 3$ un entier et soit $A \subset \llbracket 1, n \rrbracket$.
(a) Montrer par contraposée que si $s(A) \geq 2n$ alors A contient au moins 3 éléments.
(b) De manière générale, pour $p \in \llbracket 0, \frac{n(n+1)}{2} \rrbracket$, combien d'éléments compte A au minimum si $s(A) \geq p$? *On attend une réponse exprimée en fonction de p et de n .*