

CORRIGÉ
Mathématiques - samedi 10 octobre 2026
Devoir n°2 Durée : 4h

Exercice 1.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on résout pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) = (a, b, c) &\iff (x - y + z, 2x - z, x + y - z) = (a, b, c) \\
 &\iff \begin{cases} x - y + z = a \\ 2x - z = b \\ x + y - z = c \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x - y + z = a \\ 2y - 3z = -2a + b \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ 2y - 2z = -a + c \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x - y + z = a \\ 2y - 3z = -2a + b \\ z = a - b + c \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x - y + z = a \\ y = \frac{-2a + b + 3z}{2} = \frac{a - 2b + 3c}{2} \\ z = a - b + c \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = a + y - z = a + \frac{a - 2b + 3c}{2} - (a - b + c) = \frac{a + c}{2} \\ y = \frac{a - 2b + 3c}{2} \\ z = a - b + c \end{cases}
 \end{aligned}$$

On obtient une unique solution $(x, y, z) = (\frac{a+c}{2}, \frac{a-2b+3c}{2}, a-b+c)$ donc f est bijective et sa bijection réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad f^{-1}(a, b, c) = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{a-2b+3c}{2}, a-b+c \right).$$

Exercice 2.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x \in D \iff \sqrt{5x-1} \text{ existe} \iff 0 \leq 5x-1 \iff \frac{1}{5} \leq x.$$

Ainsi l'ensemble de définition (D) de l'équation (E) est : $D = \left[\frac{1}{5}, +\infty \right[.$

2. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
 [a-b] = 0 &\iff 0 \leq a-b < 1 \iff (0 \leq a-b \text{ et } a-b < 1) \\
 &\iff (b \leq a \text{ et } a-1 < b) \iff a-1 < b \leq a.
 \end{aligned}$$

3. Soit $x \in D$. En utilisant la question précédente, on a donc

$$\begin{aligned}
 (E) &\iff \lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor = 0 \\
 &\iff 2x - 1 < \sqrt{5x-1} \leq 2x \\
 &\iff \begin{cases} 2x - 1 < \sqrt{5x-1} & (*_1) \\ \text{et} \\ \sqrt{5x-1} \leq 2x & (*_2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

• Résolution de $(*_1)$

On distingue deux cas,

- si $x < \frac{1}{2}$ alors $2x - 1 < 0$ et donc $2x - 1 < \sqrt{5x-1}$ puisqu'une racine carrée est toujours positive. On trouve donc que les solutions dans ce cas sont les éléments de $[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}[$.
- si $x \geq \frac{1}{2}$ alors $2x - 1 \geq 0$ et $5x - 1 \geq 0$ donc on a :

$$2x - 1 < \sqrt{5x-1} \iff (2x-1)^2 < 5x-1 \iff 4x^2 - 9x + 2 < 0$$

Le discriminant de $4X^2 - 9X + 2$ est $\Delta = 81 - 4 \times 4 \times 2 = 49$, donc il a deux racines, qui sont $\frac{9-7}{8} = \frac{1}{4}$ et $\frac{9+7}{8} = 2$.

De plus, son coefficient dominant est positif, donc

$$4x^2 - 9x + 2 < 0 \iff \frac{1}{4} < x < 2.$$

Les solutions dans ce cas sont donc les éléments de $[\frac{1}{2}, 2]$.

Finalement,

$$(*_1) \iff x \in \left[\frac{1}{5}, 2 \right[\cup \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \iff x \in \left[\frac{1}{5}, 2 \right]$$

• Résolution de $(*_2)$

$$(*_2) \iff \sqrt{5x-1} \leq 2x$$

$$\iff 5x - 1 \leq (2x)^2 \quad (\text{correct car } 2x \geq 0 \text{ et } 5x - 1 \geq 0 \text{ car } x \in D)$$

$$\iff 0 \leq 4x^2 - 5x + 1$$

Le discriminant du polynôme $4X^2 - 5X + 1$ est $\Delta = 25 - 4 \times 4 \times 1 = 9$, il a donc deux racines, qui sont $\frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$ et $\frac{5+3}{8} = 1$.

Comme de plus son coefficient dominant est positif, on a

$$4x^2 - 5x + 1 \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{4} \text{ ou } x \geq 1$$

En se rappelant que $x \in D$, on trouve finalement que

$$(*_2) \iff x \in \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4} \right] \cup \left[1, +\infty \right[$$

• Conclusion

En combinant les deux résolutions ci-dessus, on obtient finalement que :

L'ensemble des solutions de (E) est $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4} \right] \cup \left[1, 2 \right]$.

Exercice 3.

Partie A : Fonction auxiliaire

1.
 - Ensemble de départ
Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $t - 1 \neq 0$ et donc $g(t)$ existe.
Ainsi, on peut prendre $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme ensemble de départ.
 - Ensemble d'arrivée
Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Il faut montrer que $g(t) \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; pour cela, il faut donc montrer que $g(t) \neq 1$.
Or : $g(t) = 1 \iff \frac{t+1}{t-1} = 1 \iff t+1 = t-1 \iff 1 = -1$.
Ceci est donc impossible, ce qui prouve que $g(t) \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Ainsi, on peut prendre $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme ensemble d'arrivée.

Ces deux points prouvent que g est bien définie.

2. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On résout pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$g(t) = y \iff \frac{t+1}{t-1} = y$$

$$\iff t+1 = y(t-1) \quad (\text{correct car } t \neq 1)$$

$$\iff 1+y = t(y-1)$$

$$\iff t = \frac{y+1}{y-1} \quad (\text{correct car } y \neq 1)$$

On a donc trouvé un unique antécédent t à y .

Enfin, on a bien $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par des calculs identiques à ceux de la partie "Ensemble d'arrivée" dans la question 1.

Ceci prouve que g est bijective.

De plus, sa réciproque est :

$$\begin{array}{ccc} g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} & \rightarrow & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ y & \mapsto & \frac{y+1}{y-1} \end{array}$$

3. On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $g(t) = \frac{t-1+2}{t-1} = 1 + \frac{2}{t-1}$.

La fonction $t \mapsto t-1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc, par passage à l'inverse, la fonction $t \mapsto \frac{2}{t-1}$ est strictement décroissante sur $] -\infty, 1[$ et strictement décroissante sur $] 1, +\infty [$.

Ajouter 1 ne change pas les variations.

g est donc strictement décroissante sur $] -\infty, 1[$ et strictement décroissante sur $] 1, +\infty [$.

On pouvait aussi calculer la dérivée de g : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $g'(t) = -\frac{2}{(t-1)^2} < 0$ et on obtient la même conclusion.

Partie B : Etude de f

4. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :
 $\frac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}$ existe $\iff \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) \neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e \end{cases}$
Ainsi f est définie sur $D =]0, e[\cup]e, +\infty[$

5. Pour tout $x \in D$, $f(x) = g(\ln(x))$, ce qui prouve que :

$$f = g \circ u \text{ en prenant } u \text{ définie par : } \begin{array}{ccc} u & : &]0, e[\cup]e, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ & x & \mapsto \ln(x) \end{array}$$

6. On a $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (en fait, $f(D) = g(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.)

7. On remarque que la fonction u est une bijection de D dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et sa bijection réciproque est $u^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow]0, e[\cup]e, +\infty[$ Comme g est aussi une bijection, f est bijective en tant que composée de deux bijections, et $f^{-1} = (g \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ g^{-1}$ donc $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow D$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f^{-1}(x) = u^{-1}(g^{-1}(x)) = \exp(g^{-1}(x)) = \exp\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Exercice 4.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} + \frac{a}{4} > 0$ car $e^{2x} > 0$ et $a > 0$. Ainsi f_a est définie sur $\mathbb{R}$. Elle y est de plus dérivable comme composée de fonctions dérivables et :

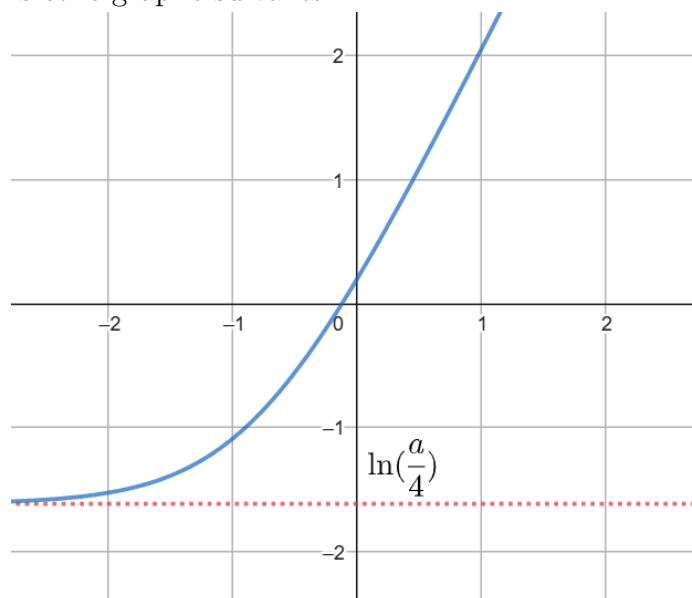
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_a(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + \frac{a}{4}} > 0$$

ainsi f_a est croissante sur $\mathbb{R}$.

Enfin, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = +\infty$; et comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$ on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = \ln\left(\frac{a}{4}\right)$.

On obtient donc le tableau de variations et le graphe suivants :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$\ln\left(\frac{a}{4}\right)$	$+\infty$



2. Résolvons pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f_a(x) = x \iff \ln\left(e^{2x} + \frac{a}{4}\right) = x \iff e^{2x} + \frac{a}{4} = e^x \iff (*) : \begin{cases} y = e^x \\ y^2 - y + \frac{a}{4} = 0 \end{cases}$$

Or le discriminant de $X^2 - X + \frac{a}{4}$ vaut $\Delta = 1 - a > 0$ car $a < 1$. Donc ce polynôme admet deux racines qui sont

$$q_1 = \frac{1 + \sqrt{1-a}}{2} \text{ et } q_2 = \frac{1 - \sqrt{1-a}}{2}.$$

Remarquons alors que $q_1 > 0$ et que, comme $0 < a < 1$ on a $0 < 1 - a < 1$ donc $\sqrt{1-a} < 1$ et donc $q_2 > 0$. Ainsi, on peut poursuivre la résolution en passant au logarithme et écrire :

$$\begin{aligned}
 (*) &\iff \begin{cases} y = e^x \\ y = \frac{1 + \sqrt{1-a}}{2} \text{ ou } y = \frac{1 - \sqrt{1-a}}{2} \end{cases} \\
 &\iff e^x = \frac{1 + \sqrt{1-a}}{2} \text{ ou } e^x = \frac{1 - \sqrt{1-a}}{2} \\
 &\iff \boxed{x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-a}}{2}\right) \text{ ou } x = \ln\left(\frac{1 - \sqrt{1-a}}{2}\right)}.
 \end{aligned}$$

On a donc bien montré que l'équation $f_a(x) = x$ admettait deux solutions : $\ln(q_1)$ et $\ln(q_2)$.

Pour finir, comme mentionné précédemment, $\sqrt{1-a} < 1$ donc $q_1 = \frac{1 + \sqrt{1-a}}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$ donc $\boxed{\ln(q_1) < 0}$. De plus, $q_2 = \frac{1 - \sqrt{1-a}}{2} < \frac{1}{2} < 1$ donc $\boxed{\ln(q_2) < 0}$.

3. On calcule que $u_1 = f_a(u_0) = f_a(0) = \ln(e^0 + \frac{a}{4}) = \boxed{\ln(1 + \frac{a}{4})}$.
4. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.

Tout d'abord, puisque $a > 0$ on a $u_1 = \ln(1 + \frac{a}{4}) > \ln(1) = 0 = u_0$. Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Supposons ensuite que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_{n+1} \geq u_n$. Alors comme f_a est croissante sur $\mathbb{R}$ cela implique que $f_a(u_{n+1}) \geq f_a(u_n)$ c'est-à-dire $u_{n+2} \geq u_{n+1}$, ce qu'il fallait démontrer.

5. La suite (u_n) est croissante. D'après l'indication, pour montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, il suffit de montrer qu'il est impossible que (u_n) converge.

Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ pour un certain $\ell \in \mathbb{R}$. On aura alors aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$, mais par ailleurs $u_{n+1} = \ln(e^{2u_n} + \frac{a}{4}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(e^{2\ell} + \frac{a}{4})$. Par unicité de la limite, cela impose que $\ell = \ln(e^{2\ell} + \frac{a}{4})$ c'est-à-dire que $f_a(\ell) = \ell$.

D'après la question 2, on a donc nécessairement $\ell < 0$. Mais comme (u_n) est croissante et que $u_0 = 0$ on a en fait $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne que $\ell \geq 0$. Ceci établit une contradiction, et c'est donc finalement que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$.

Exercice 5.

1. (a) L'ensemble des antécédents de 6 par s est :

$$\boxed{\{\{6\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}\}}.$$

- (b) L'application s n'est pas injective puisque, par exemple, $s(\{3\}) = 3$ et $s(\{1, 2\}) = 1 + 2 = 3$. On a donc $s(\{3\}) = s(\{1, 2\})$ alors que $\{3\} \neq \{1, 2\}$.

L'application s est surjective car tout entier naturel k admet un antécédent par s dans $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}^*)$:

- si $k = 0$, $A = \emptyset \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}^*)$ vérifie $s(\emptyset) = 0$.
- si $k \in \mathbb{N}^*$, $A = \{k\} \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}^*)$ vérifie $s(\{k\}) = k$.

2. On écrit l'ensemble K en extension :

$$\boxed{K = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}}.$$

3. (a) Supposons que $A \subset B$. On distingue deux cas :

- si $A = B$, alors $s(A) = s(B)$, donc $s(A) \leq s(B)$.
- si $A \subsetneq B$, alors $B \setminus A \neq \emptyset$. Comme $A, B \subset \mathbb{N}^*$, on a $B \setminus A = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}$ avec $k_1, k_2, \dots, k_p > 0$. Dès lors, $s(B) = s(A) + k_1 + k_2 + \dots + k_p \geq s(A)$.

Ceci montre bien que $A \subset B \implies s(A) \leq s(B)$.

- (b) L'implication réciproque est fautive, comme le prouve le contre-exemple donné par $A = \{2\}$ et $B = \{3\}$. On a bien $s(A) = 2 \leq 3 = s(B)$, mais $A \not\subset B$.

- (c) Montrons d'abord que $\llbracket 0, 2n-1 \rrbracket \subset S$:

Soit $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$, il faut montrer qu'il existe $A \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $k = s(A)$. On distingue 3 cas :

- si $k = 0$, alors $A = \emptyset$ convient puisque $s(\emptyset) = 0$; ainsi $0 \in S$.
- si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $A = \{k\}$ convient puisque $s(\{k\}) = k$; ainsi $k \in S$.
- si $k \in \llbracket n+1, 2n-1 \rrbracket$, alors $A = \{n, k-n\}$ convient. En effet, comme $n+1 \leq k \leq 2n-1$, on a $1 \leq k-n \leq n-1$. Donc $A \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ et $n \neq k-n$, de sorte qu'on a bien $s(A) = n + k - n = k$. Ainsi $k \in S$.

Dans tous les cas on a montré que $k \in S$. Ainsi $\llbracket 0, 2n-1 \rrbracket \subset S$.

Montrons maintenant que $S \subset \llbracket 0, \frac{n(n+1)}{2} \rrbracket$:

Soit $k \in S$, alors il existe $A \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $k = s(A)$. Tout d'abord, s étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $k = s(A) \geq 0$. Ensuite, en utilisant la question 3.a, on déduit de $A \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ que :

$$k = s(A) \leq s(\llbracket 1, n \rrbracket) = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ainsi $0 \leq k \leq \frac{n(n+1)}{2}$, donc $k \in \llbracket 0, \frac{n(n+1)}{2} \rrbracket$. Finalement, $S \subset \llbracket 0, \frac{n(n+1)}{2} \rrbracket$.

4. (a) Raisonner par contraposée revient ici à montrer que : si A contient strictement moins de 3 éléments, alors $s(A) < 2n$. Supposons donc que $A \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ contienne exactement 0, 1 ou 2 éléments et montrons que $s(A) < 2n$:

- si A ne contient aucun élément, alors $A = \emptyset$ et $s(A) = s(\emptyset) = 0 < 2n$.
- si A ne contient qu'un seul élément, alors $A = \{k\}$ pour un certain $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et donc $s(A) = s(\{k\}) = k \leq n < 2n$ (car $n \geq 1$).
- si A contient exactement deux éléments, alors on peut écrire $A = \{k_1, k_2\}$ avec $1 \leq k_1 < k_2 \leq n$, et alors $s(A) = s(\{k_1, k_2\}) = k_1 + k_2 \leq (n-1) + n = 2n-1 < 2n$.

Dans tous les cas on a bien montré que $s(A) < 2n$. Par contraposition, cela prouve que si $s(A) \geq 2n$, alors A contient au moins 3 éléments.

- (b) La question revient à chercher quel est le nombre minimal d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qu'il faut sommer pour obtenir une somme supérieure ou égale à p . Il est clair que pour minimiser le nombre de termes dans cette somme, il faut choisir les termes les plus grands possibles. Or la plus grande somme qu'on puisse obtenir avec k termes de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est :

$$S_k = n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + (n - k + 1)$$

La question revient donc à déterminer le plus petit $k \in \mathbb{N}$ tel que $S_k \geq p$. Calculons S_k :

$$S_k = \sum_{i=n-k+1}^n i = \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^{n-k} i = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} = \frac{-k^2 + (2n+1)k}{2}$$

Ainsi $S_k \geq p \iff -k^2 + (2n+1)k \geq 2p \iff k^2 - (2n+1)k + 2p \leq 0$. Le discriminant du trinôme $X^2 - (2n+1)X + 2p$ est $\Delta = (2n+1)^2 - 8p$.

Comme $0 \leq p \leq \frac{n(n+1)}{2}$, on a $0 \geq -8p \geq -4n(n+1)$, donc :

$$(2n+1)^2 \geq \Delta \geq (2n+1)^2 - 4n(n+1) = 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 4n = 1 \geq 0.$$

Le trinôme admet donc deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{2n+1 - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2n+1 + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Comme son coefficient dominant est négatif, pour que $k^2 - (2n+1)k + 2p \leq 0$, on doit avoir $x_1 \leq k \leq x_2$.

Le plus petit entier k vérifiant cette condition est donc la partie entière supérieure de x_1 , noté $\lceil x_1 \rceil$, c'est-à-dire l'entier N tel que $N - 1 < x_1 \leq N$.

Finalement, si $s(A) \geq p$, on peut affirmer que A contient au minimum :

$$\left\lceil \frac{2n+1 - \sqrt{(2n+1)^2 - 8p}}{2} \right\rceil$$

éléments.