Feuille de cours 6.2 : fonctions circulaires

Ce document est extrait du cours de Mme Magnoux, PCSI 2, lycée Jacques Decour.

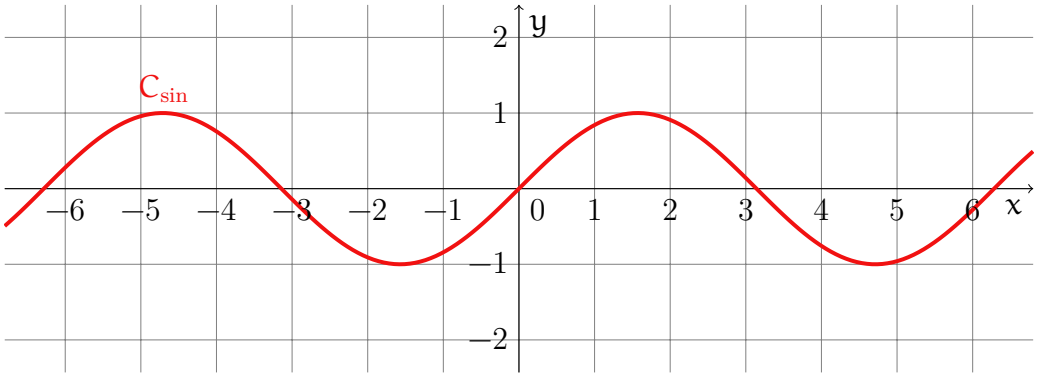
1 Sinus

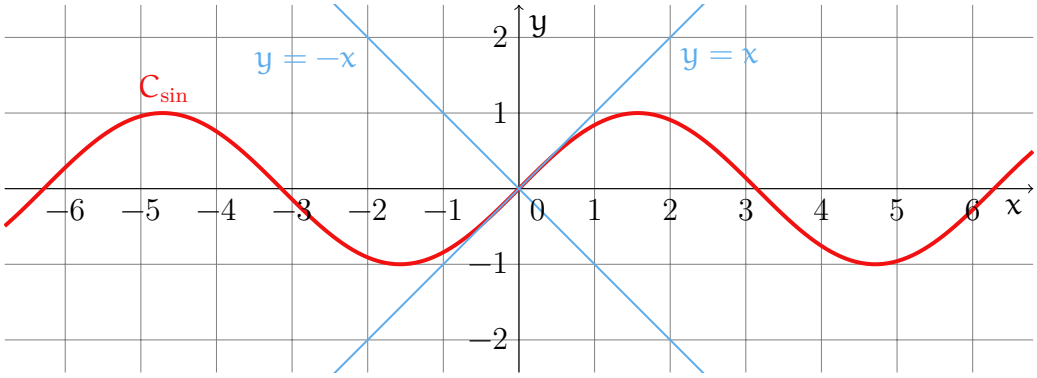
On considère la fonction sinus, notée sin, qui à tout nombre réel associe son sinus défini précédemment.

$$\begin{array}{rccc} \sin & : & \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ & & x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

▪ Etude de la fonction sinus

- La fonction sin est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin'(x) = \cos(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leqslant |x|$
- Représentation graphique





preuve

- Dérivée

→ But

Soit $\begin{array}{|l} a \in \mathbb{R} \text{ fixé} \\ h \in \mathbb{R}^* \end{array}$

Le taux d'accroissement de sin entre $a+h$ et a est :

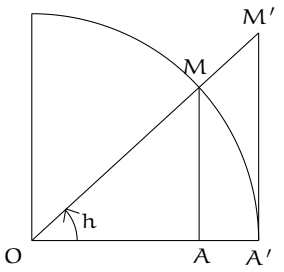
$$\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \frac{\sin(a)\cos(h)+\sin(h)\cos(a)-\sin(a)}{h}$$

$$= \sin(a)\,\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(a)\,\frac{\sin(h)}{h}$$

But : déterminer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(h)-1}{h}$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h}$.

→ sinus en 0^+

On prend $h \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et on s'appuie sur le dessin suivant :



Sur ce dessin :
$OA = \cos(h)$ $\quad OA' = 1$
$OM = 1$
$AM = \sin(h)$ $\quad A'M' = \tan(h)$
De plus on note :
$\mathcal{A}$ l'aire du triangle OAM
$\mathcal{A}'$ l'aire du triangle $OA'M'$
$\mathcal{A}_s$ l'aire du secteur angulaire délimité par $[OA']$, $[OM]$ et le cercle trigonométrique

Par construction : $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{A}_s \leqslant \mathcal{A}'$, que l'on transforme :

$$\mathcal{A} \leqslant \mathcal{A}_s \leqslant \mathcal{A}'$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{OA \times AM}{2} \leqslant \pi \times 1^2 \times \frac{h}{2\pi} \leqslant \frac{OA' \times A'M'}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cos(h)\,\sin(h)}{2} \leqslant \frac{h}{2} \leqslant \frac{\tan(h)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(h) \leqslant \frac{h}{\sin(h)} \leqslant \frac{1}{\cos(h)} \qquad (\text{car } \sin(h) > 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos(h)} \geqslant \frac{\sin(h)}{h} \geqslant \cos(h) \qquad (\text{tous les membres sont strictement positifs})$$

On en déduit par théorème des gendarmes que $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$

→ sinus en 0

La fonction $h \mapsto \dfrac{\sin(h)}{h}$ est paire.

On en déduit que $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$ et donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$

→ cosinus

$$\begin{aligned}\frac{\cos(h)-1}{h} &= \frac{\Big(\cos(h)-1\Big)\Big(\cos(h)+1\Big)}{h\Big(\cos(h)+1\Big)}\\ &= \frac{\cos^2(h)-1}{h\Big(\cos(h)+1\Big)}\\ &= -\frac{\sin^2(h)}{h\Big(\cos(h)+1\Big)}\\ &= -\frac{\sin(h)}{h}\times\frac{\sin(h)}{\cos(h)+1}\end{aligned}$$

Par opérations sur les limites, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(h)-1}{h}=0$.

→ Conclusion

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}=\cos(a)$

Donc sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\sin'=\cos$.

- $\forall x\in\mathbb{R},\ |\sin(x)|\leqslant|x|$

→ Sur $[0,+\infty[$

But : montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$, $|\sin(x)|\leqslant x$

C'est-à-dire : montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$, $-x\leqslant\sin(x)\leqslant x$

- Inégalité de gauche

On définit la fonction f par :

$$\begin{array}{rccc} f & : & [0+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x+\sin(x)\end{array}$$

f est définie et dérivable sur $[0,+\infty[$.

Soit $x\in[0,+\infty[$.

$f'(x)=1+\cos(x)$

Or : $-1\leqslant\cos(x)$, donc $0\leqslant 1+\cos(x)$.

Ainsi, f est croissante sur $[0,+\infty[$. Elle atteint donc son minimum en 0 et ce minimum est $f(0)=0$.

Ceci prouve que $0\leqslant x+\sin(x)$, c'est-à-dire $-x\leqslant\sin(x)$.

- Inégalité de droite

Même raisonnement avec $g:x\mapsto x-\sin(x)$

→ Sur $]-\infty,0]$

But : montrer que pour tout $x\in]-\infty,0]$, $|\sin(x)|\leqslant|x|$

Soit $x\in]-\infty,0]$; on pose $X=-x$ qui appartient alors à $[0,+\infty[$.

D'après le début : $|\sin(X)|\leqslant|X|$.

D'où : $|\sin(-x)|\leqslant|-x|$.

C'est-à-dire : $|\sin(x)|\leqslant|x|$ (imparité de sin et propriétés de la valeur absolue) .

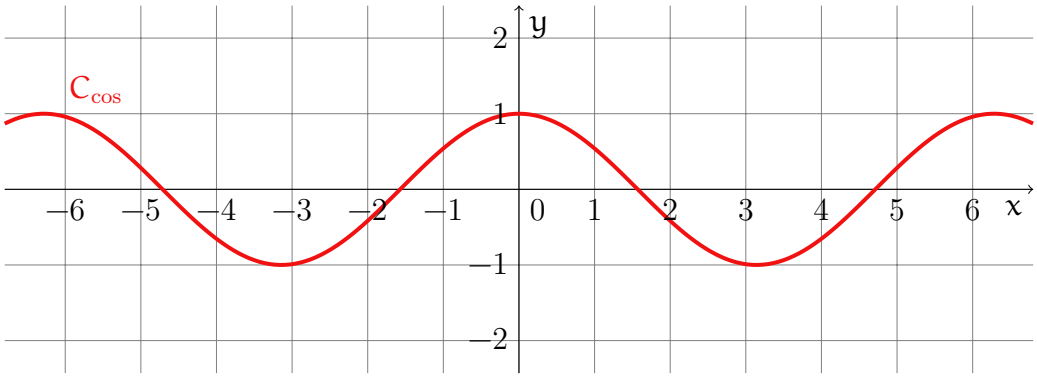
2 Cosinus

On considère la fonction cosinus, notée cos, qui à tout nombre réel associe son cosinus défini précédemment.

$$\begin{array}{rccc} \cos & : & \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ & & x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$$

■ Etude de la fonction sinus

- La fonction cos est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\sin(x)$
- Représentation graphique



preuve pour la dérivée

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé, $h \in \mathbb{R}^*$

Le taux d'accroissement de cos entre $a+h$ et a est :

$$\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} = \frac{\cos(a)\cos(h)-\sin(a)\sin(h)-\cos(a)}{h}$$

$$= \cos(a)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(a)\frac{\sin(h)}{h}$$

D'après les calculs du paragraphe sur le sinus :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} = -\sin(a)$$

Donc cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\cos' = -\sin$.

3 Tangente

On considère la fonction tangente, notée tan, qui à tout nombre réel associe sa tangente définie comme précédemment.

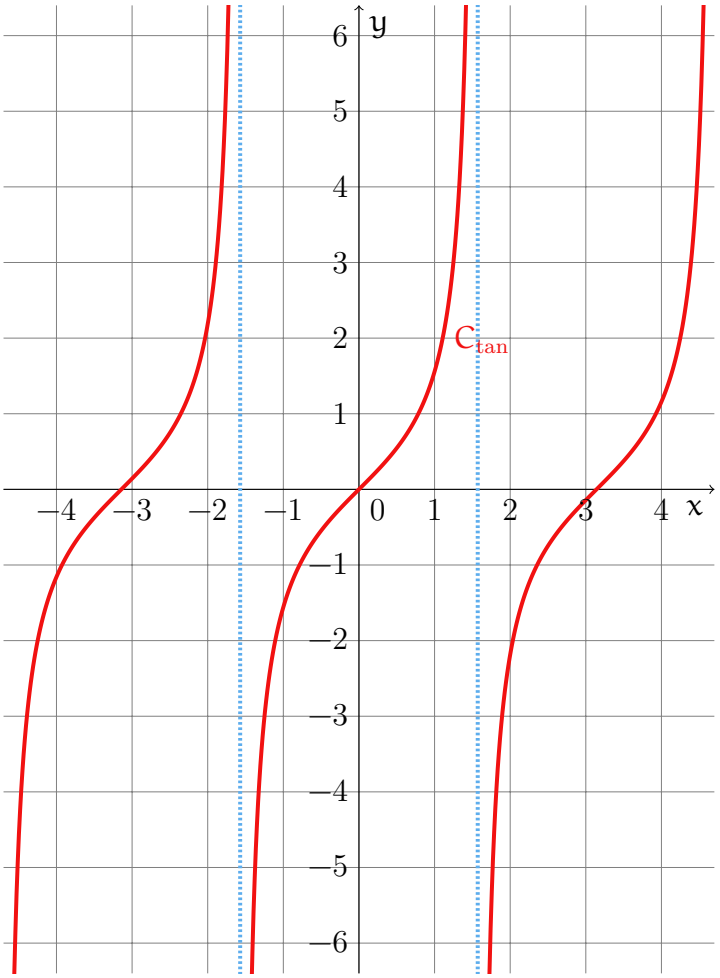
$$\begin{array}{rccl} \tan & : & D_{\tan} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}$$

Rem

Rappel : $D_{\tan} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[= \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

▪ Etude de la fonction tangente

- La fonction tan est définie, continue et dérivable sur $D_{\tan}$.
- $\forall x \in D_{\tan}, \ \tan'(x) = 1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
- Sur chaque intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, tan est strictement croissante.
- Limites : $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$
- Représentation graphique



preuve

- Dérivée
  cos ne s'annule pas sur $D_{\tan}$.
  Donc tan est dérivable sur $D_{\tan}$.
  Soit $x \in D_{\tan}$.

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &= \frac{\cos(x)\cos(x)+\sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)} && \text{(en simplifiant avec } \cos^2(x)+\sin^2(x)=1\text{)} \\
&= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} && \text{(en calculant autrement)} \\
&= 1+\tan^2(x)
\end{aligned}$$

- Limites
  Pas de forme indéterminée.