Exercice 1
Donner le plus rapidement possible (si ces quantités existent) :

1. $\sin(\frac{2\pi}{3})$
2. $\cos(\frac{-8\pi}{3})$
3. $\tan(\frac{-9\pi}{2})$
4. $\tan(\frac{-3\pi}{4})$
5. $\cos(31\pi)$
6. $\sin(-12\pi)$
7. $\arccos(1)$
8. $\arcsin(-\frac{1}{2})$
9. $\arctan(-1)$
10. $\arccos(\sqrt{3})$
11. $\arctan(\sqrt{3})$
12. $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2})$

Exercice 2
Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$ et préciser les solutions appartenant à $[0, 2\pi[$.

1. $\sin(x) = 1$
2. $2\cos(x) + \sqrt{2} = 0$
3. $\cos(3x) = -\frac{1}{2}$
4. $\cos(2x) = \cos(\pi - 2x)$

Exercice 3
Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $\cos(3x) = \cos(x)$
2. $\cos(3x) = \sin(x)$
3. $\tan(3x) = \tan(x)$
4. $\cos^2(x) - \frac{3}{2}\cos(x) + \frac{1}{2} = 0$
5. $\sin^2(x) + 3\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2$
6. $\cos(2x) = -2\cos(x) - 1$
7. $2\sin(2x - \dfrac{\pi}{3}) = \sqrt{2}$

Exercice 4
Résoudre sur $\mathbb{R}$ et préciser les solutions appartenant à $[0, 2\pi[$.

1. $\sin(\frac{x}{\pi} + 1) = 0$
2. $\cos(x) = \frac{1}{4}$
3. $\cos(5x) = \cos(x + \dfrac{\pi}{3})$
4. $\sin(5x) = \cos(x)$
5. $\tan(x)^2 + 5\tan(x) = 0$
6. $\tan(x + \frac{\pi}{2}) = -\tan(x)$

Exercice 5
Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\cos(5x) = 2$ sur $\mathbb{R}$
2. $\tan(5x) = 2$ sur $\mathbb{R}$
3. $1 - 2\sin(x) \leq 0$ sur $[0, 2\pi[$
4. $\cos(x) < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0, 2\pi[$
5. $\tan(x) > 1$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 6
Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\sin^2(2x + \dfrac{\pi}{6}) = \cos^2(x + \dfrac{\pi}{3})$ sur $\mathbb{R}$
2. $3|\cos(x)| < 1$ sur $[0, 2\pi[$
3. $\sin^2(x) \leq \dfrac{3}{4}$ sur $[0, 2\pi[$
4. $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 < 0$ sur $[0, 2\pi[$

Exercice 7
Résoudre sur $[0, 2\pi[$ l'équation suivante :

$$\cos(x) + \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

1. avec la méthode du cours,
2. en passant au carré.

Exercice 8
Déterminer les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 9
Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (sans utiliser les valeurs $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ trouvées à l'exercice précédent).

1. Rappeler la formule du cours donnant $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$, puis en déduire la formule donnant $\tan(2a)$ en fonction de $\tan(a)$.
2. En déduire que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est solution de l'équation $t^2 + 2\sqrt{3}t - 1 = 0$.
3. Conclure.

Exercice 10
Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\tan(x)} - \dfrac{2}{\tan(2x)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Pour tout $x \in D$, utiliser des formules du cours pour donner une expression plus simple de $f(x)$.
3. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \tan(2^k)$.

Exercice 11
Soit $f : x \longmapsto \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$.

1. Quel est l'ensemble de définition et de dérivabilité D de f ?
2. Montrer que pour tout $x \in D$, $f'(x) = 0$. Qu'en déduit-on sur f ?
3. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

Exercice 12
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit les fonctions f_n et g_n sur $]-1, 1[$ par :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{\sin(n \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n et g_n sont des fonctions polynomiales.