
Devoir maison n°1
À rendre le lundi 2 novembre 2026

- **Vous pouvez rendre 1 copie pour 2 élèves.**
- **Les qualités de rédaction (clarté des raisonnements, lisibilité, orthographe...) seront sensiblement prises en considération dans l'évaluation des copies.**
- **Ce sujet est constitué de 2 exercices indépendants.**

Exercice 1 (La conquête de Pâris)**.**

1. Montrer que :
$$\forall x > 1,\ \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \leq \ln\left(\frac{x}{x-1}\right).$$
2. En déduire un encadrement de $S_n = \sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k}$ pour tout entier $n \geq 2$.
3. En utilisant le théorème "des gendarmes", en déduire la limite de S_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2 (Alt + 3)**.**

Dans un modèle géocentrique simple, la Terre est considérée comme immobile, le Soleil décrit un cercle autour de la Terre, et les autres planètes décrivent chacune un cercle autour du Soleil. Ainsi, vue depuis la Terre, la trajectoire d'une planète résulte de la combinaison de deux mouvements circulaires : celui du Soleil autour de la Terre et celui de la planète autour du Soleil.

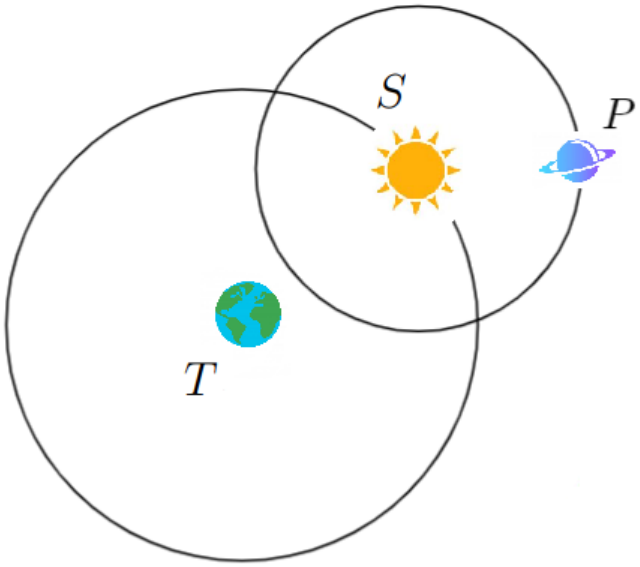


FIGURE 1 – Un modèle géocentrique simple

Dans cet exercice, on s'intéresse à une planète P qui tourne autour du Soleil S sur une orbite circulaire de rayon $\frac{R}{2}$, tandis que le Soleil décrit un cercle de rayon R autour de la Terre T. Afin de simplifier les calculs, on choisit $R = 1$ comme unité de longueur de sorte que $TS = 1$ et $PS = \frac{1}{2}$. Enfin, on suppose que la vitesse angulaire de la planète P autour du Soleil est deux fois plus grande que celle du Soleil autour de la Terre.

Sous ces hypothèses, le point P évolue selon la trajectoire représentée figure 2. Il décrit une figure, représentée figure 3, appelée *cardioïde* à cause de sa ressemblance avec un cœur.

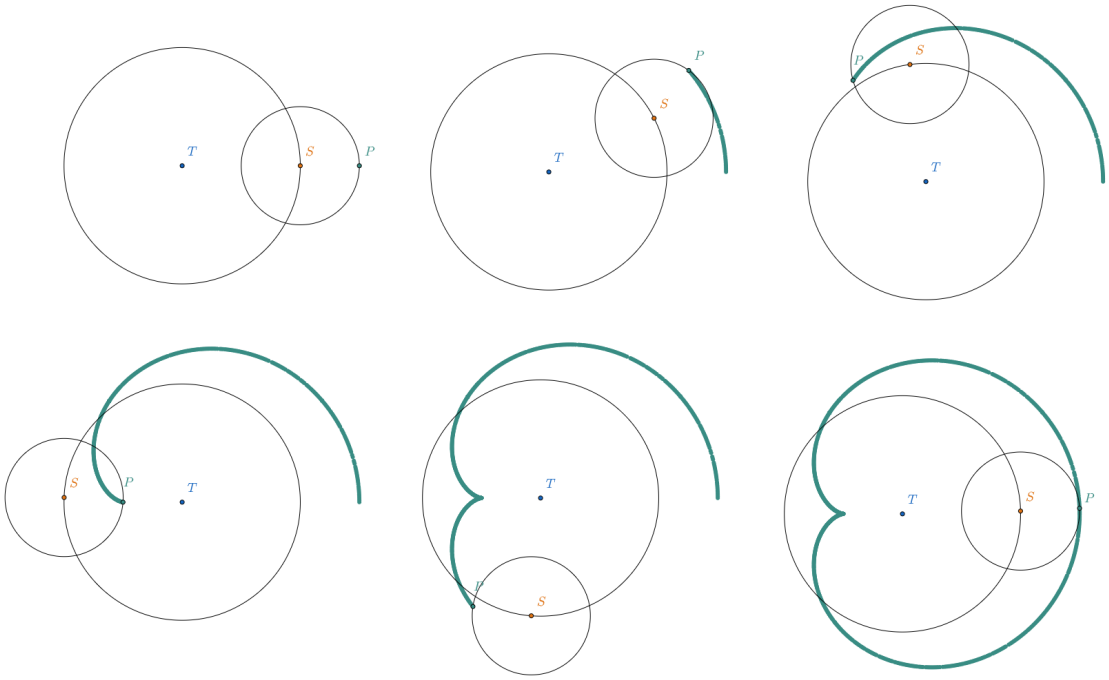


FIGURE 2 – Évolution de la trajectoire du point P. On pourra consulter la version animée en cliquant sur ⊙ dans le fichier accessible sur `https://www.geogebra.org/classic/nwrp7wjn`

On souhaite dans un premier temps obtenir deux paramétrisations cartésiennes de la cardioïde. Une paramétrisation cartésienne d'une courbe $\mathcal{C}$ est une description par paramètre de $\mathcal{C}$ via les coordonnées cartésiennes de ses points. En d'autres termes, il s'agit de décrire la courbe $\mathcal{C}$ sous la forme

$$\mathcal{C} = \{(x(s), y(s)),\ s \in E\}$$

où x et y sont des fonctions définies sur un ensemble E. On souhaite déterminer des fonctions x, y et un ensemble E adéquats lorsque $\mathcal{C}$ est la cardioïde.

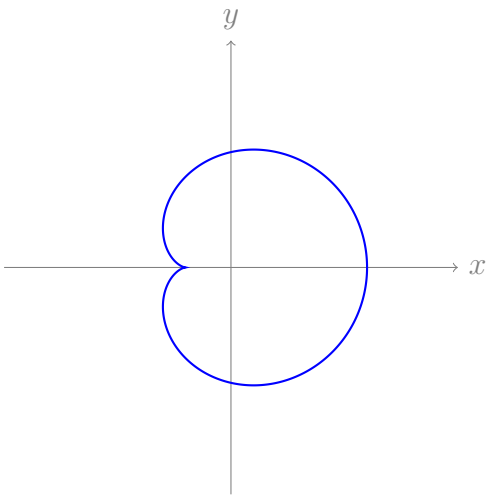


FIGURE 3 – Une cardioïde

1. Expliquer pourquoi une paramétrisation cartésienne de la cardioïde est :

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta) + \dfrac{1}{2}\cos(2\theta) \\ y(\theta) = \sin(\theta) + \dfrac{1}{2}\sin(2\theta) \end{cases}$$

pour $\theta \in [0, 2\pi[$. On justifiera ce fait à l'aide d'un schéma faisant figurer la Terre, le Soleil, la planète P, l'angle θ, et précisant quel est l'origine du repère.

On souhaite en déduire une deuxième paramétrisation ne faisant plus intervenir les fonctions cos et sin et s'écrivant exclusivement en fonction de la variable $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

On note Θ l'ensemble des réels $\theta \in [0, 2\pi[$ pour lesquels t est correctement défini.

2. Déterminer l'ensemble Θ et indiquer comment varie t lorsque θ parcourt Θ. Quel point P^0 de la cardioïde sera par conséquent exclu de cette nouvelle paramétrisation (on précisera les coordonnées de P^0) ?
3. Démontrer l'identité suivante et préciser pour quel valeurs de $\varphi \in \mathbb{R}$ elle est correctement définie :

$$\cos^2(\varphi) = \frac{1}{1 + \tan^2(\varphi)}$$

4. En déduire que pour tout $\theta \in \Theta$ on a

$$\cos(\theta) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

5. Montrer alors qu'une paramétrisation de la cardioïde privée de P^0 est :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2} - \dfrac{1}{2} \\ y(t) = \dfrac{4t}{(1 + t^2)^2} \end{cases}$$

pour $t \in \mathbb{R}$. Comment retrouve-t-on le point P^0 avec cette paramétrisation ?

Peut-être avez-vous déjà remarqué qu'on rencontre la cardioïde dans la vie de tous les jours. Prenez un bol (ou n'importe quel récipient de forme ronde) rempli d'un liquide opaque (comme du lait ou du thé) et éclairez-le latéralement. On voit apparaître une cardioïde à la surface du liquide comme sur la figure 4.

On dit que la cardioïde est une *caustique*, c'est-à-dire une figure apparaissant par réflexion de rayons lumineux.



FIGURE 4 – Une cardioïde comme caustique

6. Reproduisez l'image de la figure 4 avec un récipient. Si vous en avez la possibilité, prenez une photographie de votre caustique et déposez-la sur cahier de prépa dans l'onglet "transferts de documents, images caustiques". Les plus belles photos seront reprises dans le corrigé.

On modélise cette situation en représentant le bord du récipient par un cercle de centre O et en plaçant une source lumineuse en un point A sur le cercle comme indiqué figure 5.

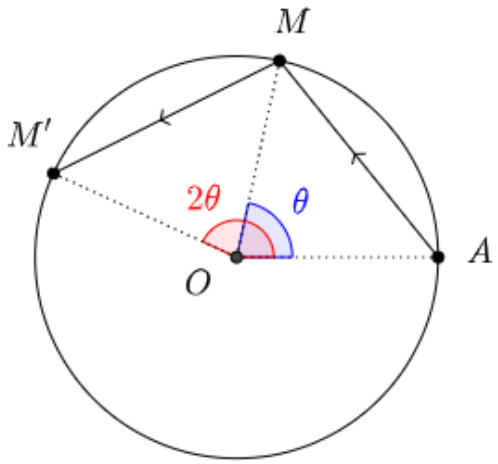


FIGURE 5 – Un rayon issu de A se réfléchit au point d'incidence M

6. Un rayon lumineux issu de A subit une réflexion totale au point d'incidence M tel que $\widehat{AOM} = \theta$. Démontrer que le rayon réfléchi atteint le bord du récipient au point M' tel que $\widehat{AOM'} = 2\theta$.

Ainsi pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$, un rayon lumineux réfléchi relie les points M et M' repérés par les angles θ et 2θ. En traçant ces rayons MM' supplémentaires – et uniquement ceux-ci – on peut voir quelle zone de la surface du liquide dans le récipient est davantage éclairée.

On propose de tracer N de ces rayons, repérés par les angles $\theta_k = \dfrac{2k\pi}{N}$ pour $k \in [\![0, N-1]\!]$. On note M_k et M'_k les points d'incidence et de réflexion du rayon correspondant à l'angle θ_k.

Pour $N = 8$ on obtient la figure 6 ci-contre où on a représenté les rayons réfléchis $M_kM'_k$ pour tout $k \in [\![0, 7]\!]$.

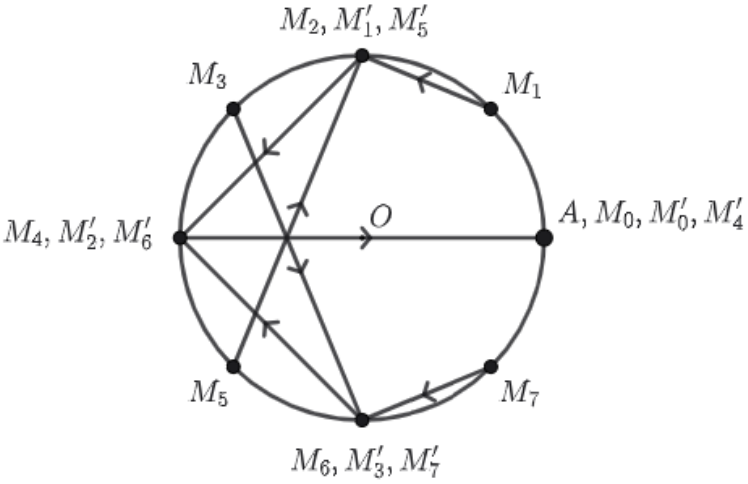


FIGURE 6 – Rayons réfléchis pour $N = 8$

7. Tracer les figures obtenues pour $N = 16$ et $N = 32$ (sans indiquer les noms des points et sans placer de flèches sur les rayons). Que constate-t-on ?