TD 6 : exo 12

On raisonne par récurrence pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la proposition $P(n)$ ci-dessous est vraie :

$P(n)$: "f_n et g_n sont des fonctions polynomiales"

Initialisation : Pour $n=0$, on a : $\forall x \in]-1,1[$

$f_0(x) = \cos(0 \arccos(x)) = \cos(0) = 1$ donc f_0 est constante donc polynomiale

et $g_0(x) = \dfrac{\sin(0 \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sin(0)}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ donc g_0 est aussi polynomiale.

Ainsi $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $P(n)$ soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors :

$\forall x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \cos((n+1)\arccos(x)) = \cos(n\arccos(x) + \arccos(x)) \\ &= \cos(n\arccos(x))\cos(\arccos(x)) - \sin(n\arccos(x))\sin(\arccos(x)) \\ (*) &= f_n(x) \times x - \sin(n\arccos(x)) \times \sqrt{1-x^2} \\ &= f_n(x) \times x - g_n(x) \times (1-x^2) \quad (**) \end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ vient du fait que $\cos(\arccos(x)) = x$ et donc $\sin^2(\arccos(x)) = 1 - \cos^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$, or $\arccos(x) \in [0, \pi]$ donc $\sin(\arccos(x)) \geq 0$ donc $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Or d'après $P(n)$, f_n et g_n sont polynomiales, comme $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1-x^2$ le sont aussi, l'égalité $(**)$ prouve que f_{n+1} est polynomiale.

Avec des arguments similaires on a : $\forall x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sin((n+1)\arccos(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n\arccos(x) + \arccos(x)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times \left(\sin(n\arccos(x))\cos(\arccos(x)) + \cos(n\arccos(x))\sin(\arccos(x))\right) \\ &= g_n(x) \times x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times f_n(x) \times \sqrt{1-x^2} \\ &= g_n(x) \times x + f_n(x) \end{aligned}$$

donc g_{n+1} est polynomiale. Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par récurrence, on a bien montré que f_n et g_n sont polynomiales pour tout $n \in \mathbb{N}$