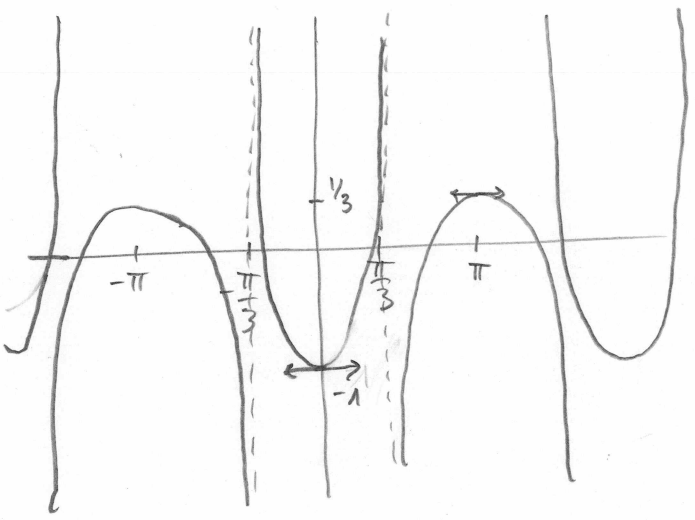
TD 5 : exo 8

1) f est définie sur $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : 2\cos(x) - 1 \neq 0\}$. On résout donc pour $x \in \mathbb{R}$,
$2\cos(x) - 1 = 0 \iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et, $\forall x \in \mathcal{D}_f$,
$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{2\cos(-x) - 1} = \frac{\cos(x)}{2\cos(x) - 1} = f(x)$ donc f est paire
$\mathcal{D}_f$ est stable par translation de 2π (i.e. $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $x + 2\pi \in \mathcal{D}_f$) et, $\forall x \in \mathcal{D}_f$
$f(x + 2\pi) = \frac{\cos(x + 2\pi)}{2\cos(x + 2\pi) - 1} = \frac{\cos(x)}{2\cos(x) - 1} = f(x)$ donc f est 2π-périodique

Finalement, on peut étudier f sur $\mathcal{D}_f \cap [0, \pi] = [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{3}\} = E$.
f est dérivable sur E et $\forall x \in E$
$$f'(x) = \frac{-\sin(x)(2\cos(x) - 1) - \cos(x)(-2\sin(x))}{(2\cos(x) - 1)^2} = \frac{\sin(x)}{(2\cos(x) - 1)^2}$$
Or $\forall x \in [0, \pi]$, $\sin(x) \geq 0$ et $(2\cos(x) - 1)^2 \geq 0$.
On obtient donc le tableau de variations ci-contre où on place que $f(0) = \frac{1}{-1} = -1$, $f(\pi) = \frac{-1}{2(-1) - 1} = \frac{1}{3}$
et que $\cos(x) \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{3}^-]{} \left(\frac{1}{2}\right)^+$ (car si $0 < x < \frac{\pi}{3}$ alors $\cos(x) > \frac{1}{2}$)
donc $2\cos(x) - 1 \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{3}^-]{} 0^+$, et comme $\cos(x) \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{3}]{} 1/2 > 0$, on obtient par quotient que $f(x) \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{3}^-]{} +\infty$. Un raisonnement similaire montre que $f(x) \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{3}^+]{} -\infty$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0
f	-1	↗	$\pm\infty$	↗	$\frac{1}{3}$

D'où finalement le graphe ci-contre obtenu sur $[0, \pi]$ puis complété à $[-\pi, \pi]$ par parité puis à $\mathcal{D}_f$ par périodicité et sur lequel on prouve que $f'(0) = f'(\pi) = 0$ donc on a des tangentes horizontales en 0 et en π et que $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}^\pm} \mp\infty$ donc on a une asymptote verticale en $\frac{\pi}{3}$



2) Posons $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et, $\forall x > 0$,

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. On résout ensuite pour $x > 0$,

$f'(x) \geq 0 \iff 1 \geq \frac{1}{x^2} \iff x^2 \geq 1$ (car $x^2 > 0$) $\iff x \geq 1$ (car $x > 0$)

D'où le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	↘	2	↗	

dans lequel on lit que : $\forall x > 0$, $f(x) \geq f(1)$

Or $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$

Ainsi $\forall x > 0$, $f(x) \geq 2$ donc $x + \frac{1}{x} \geq 2$