Programme de colles : semaine 5, du 2/11 au 6/11

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Études de fonctions

On insistera sur la différence entre f et $f(x)$. ***La fonction*** tanh ***et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.***

- ensemble de définition et d'arrivée
- opérations, composition
- fonctions monotones, strictement monotones
- fonctions paires, impaires, périodiques
- lien entre dérivée et sens de variation
- équation de la tangente au graphe en un point
- fonctions usuelles : pour chacune des fonctions suivantes, connaître : les ensembles de définition et d'arrivée, la dérivée, le sens de variation, les limites, les éventuelles parité et périodicité, l'allure du graphe :
  1. logarithme, logarithme de base a
  2. exponentielle, exponentielle de base a. $\boxed{\forall a > 0,\ \forall b \in \mathbb{R},\ a^b = \exp(b\ln(a))}$
  3. cosinus, sinus, tangente
  4. fonctions puissances $x \longmapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$
  5. valeur absolue
  6. sinus et cosinus hyperboliques
- schéma d'étude d'une fonction :
  1. ensemble de définition
  2. restriction de l'ensemble d'étude par parité et/ou périodicité
  3. ensemble de dérivabilité
  4. calcul de la dérivée
  5. recherche du signe de la dérivée
  6. tableau de variations
  7. limites et valeurs d'intérêt. *Les calculs de limites (notamment les formes indéterminées) n'ont pas été revus en classe.* ***Les élèves ne doivent pas hésiter à demander de l'aide pour calculer une limite.***
  8. allure du graphe
- obtention d'inégalités par étude de fonction.
- fonctions majorées, minorées, bornées
- notion d'extremum global/local. *Seule la définition et l'interprétation graphique ont été abordées en classe.*

2 Trigonométrie

- interprétation géométrique de la mesure d'un angle en radians, du cosinus, du sinus, de la tangente. Ensemble de définition de la tangente.
- Interprétation des théorèmes de Thalès et Pythagore avec les fonctions sin et cos (en particulier, $\sin^2 + \cos^2 = 1$)
- rotations, symétries sur le cercle trigonométrique.
- valeurs usuelles de $\sin, \cos, \tan$ (à savoir par cœur)
- formules $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.
- Les formules pour les quantités suivantes sont à savoir par cœur :
  $\cos(-\theta)$, $\sin(-\theta)$, $\tan(-\theta)$, $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$, $\tan(a+b)$
- Les formules pour les quantités suivantes sont à savoir retrouver rapidement :
  $\cos(a-b)$, $\sin(a-b)$, cos, sin et tan de $\pm\theta \pm \pi$, $\pm\theta \pm \frac{\pi}{2}$
- résolution d'équations trigonométriques sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle donné. On se ramène à $\cos(\theta) = \cos(\phi)$, $\sin(\theta) = \sin(\phi)$, $\tan(\theta) = \tan(\phi)$.
- Notation modulo. *On encourage les élèves à revenir à la définition de $a \equiv b\ [T]$ aussi souvent que nécessaire.*
- résolution d'inéquations trigonométriques sur un intervalle donné. *Pour les inéquations, on attend une justification par un dessin uniquement.*
- définition de $\arccos, \arcsin, \arctan$. Résolution de $\cos(x) = c$, $\sin(x) = s$, $\tan(x) = t$ lorsque c, s et t ne correspondent pas à des valeurs usuelles.
- Étude des fonctions $\arccos, \arcsin, \arctan$: ensembles de définition et d'arrivée, variations, graphes, dérivées. *La formule de la dérivée d'une bijection réciproque a été démontrée en admettant le caractère dérivable.*
- écriture sous la forme phase/amplitude. *La convention choisie est d'écrire $a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$ sous la forme $r\cos(\theta + \phi)$.*

3 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions ; donner et démontrer le sens de variation de $g \circ f$ si on suppose que f est (dé)croissante et g (dé)croissante sur $\mathbb{R}$ *(avec des parenthèses choisies par l'examinateur).*
2. Démontrer que la fonction nulle est la seule fonction à la fois paire et impaire.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. Donner l'équation de la tangente au graphe de f en a. Appliquer ensuite cette formule sur un exemple simple choisi par l'examinateur.
4. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Démontrer que f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.
5. Démontrer par une étude de fonction que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ e^x \geq 1 + x$.
6. Présenter une ou deux fonctions usuelles parmi : $x \longmapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, inverse, racine carrée, logarithme, exponentielle, $x \longmapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, cosinus, sinus, tangente, valeur absolue, cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, arccosinus, arcsinus, arctangente.
7. Donner la formule exprimant $\cos(2a)$ en fonction de $\cos(a)$. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
8. Énoncer et démontrer la formule donnant $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
9. Énoncer les propriétés permettant de résoudre des équations du type $\cos(\theta) = \cos(\varphi)$, $\sin(\theta) = \sin(\varphi)$ ou $\tan(\theta) = \tan(\varphi)$. On explicitera la notation $a \equiv b\ [T]$ y intervenant.
10. En utilisant l'écriture sous forme "phase/amplitude" résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}$ (ou toute autre équation du type $a\cos(x) + b\sin(x) = c$ choisie par l'examinateur).

Cette semaine en complément de la question de cours, tous les colleurs demanderont deux valeurs usuelles de cos, sin, tan, arccos, arcsin *ou* arctan *(exemple de question : donner* $\sin(\frac{5\pi}{6})$ *et* $\arctan(-\sqrt{3})$*). Les élèves sont encouragés à faire un dessin illustrant leur réponse. Ces questions seront prises en compte dans les 10 points dédiés à la question de cours.*

La question de cours est noté sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.