Exercice 8

1. Déterminer tous les nombres complexes z tels que $\dfrac{z+2i}{z-4i} \in \mathbb{R}$.
2. On suppose que $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ vérifie $|z| = 1$. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur.
3. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $u \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, montrer que $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \iff (|u| = 1 \text{ ou } z \in \mathbb{R})$.

Exercice 9

Montrer que le produit de deux nombres qui sont sommes de deux carrés d'entiers l'est aussi.

Exercice 10

1. Si $\omega \in \mathbb{C}$, rappeler l'expression de $|\omega|^2$ en fonction de ω et de son conjugué.
2. Démontrer que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ on a
$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$
3. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes fixés. Faire un dessin et y placer :
   (a) un point M d'affixe z (choisir z quelconque !),
   (b) un point M' d'affixe z' (choisir z' quelconque !),
   (c) un point A d'affixe $z+z'$,
   (d) un point B d'affixe $z-z'$.
4. À quelle identité géométrique correspond l'égalité de la question 2 ?

Exercice 11

1. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
   (a) Exprimez $\mathcal{R}e(z-1)$ et $\mathcal{I}m(z-1)$ en fonction de x et y.
   (b) Exprimez $\mathcal{R}e(z-i)$ et $\mathcal{I}m(z-i)$ en fonction de x et y.
   (c) En déduire les expressions de $|z-1|$ et $|z-i|$.
2. Résoudre l'équation $|z-i| = |z-1|$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
3. (a) Placer un point A d'affixe 1 et un point B d'affixe i sur un dessin.
   (b) Si M est un point d'affixe z, à quoi corresondent géométriquement les quantités $|z-1|$ et $|z-i|$?
   (c) Retrouver géométriquement le résultat de la question 2.

Exercice 12

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On proposera deux solutions : une approche algébrique (c'est-à-dire par le calcul) et une approche géométrique.

1. $|z+1+i| = |z+1-i|$
2. $|z-i| = |z-2-i| = \sqrt{2}$
3. $|z-\overline{z}| \leq 1$
4. $|z+1| > |z-i|$