TD 4

Exo 12 Notant $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

2) $|z-i| = |z-2-i| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+i(y-1)|^2 = 2 \\ |x-2+i(y-1)|^2 = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 2 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)^2 = 2 - x^2 \\ (x-2)^2 + 2 - x^2 = 2 \end{cases}$

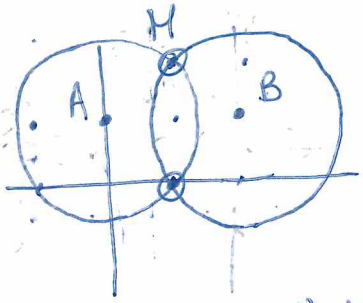
$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)^2 = 2 - x^2 \\ -4x + 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)^2 = 2-1 = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y-1 = 1 \text{ ou } y-1 = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \text{ ou } y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow z = 1+2i$ ou $z = 1$



Si $A(i)$, $B(2+i)$, $M(z)$ alors :

$|z-i| = |z-2-i| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} AM = \sqrt{2} \\ BM = \sqrt{2} \end{cases}$

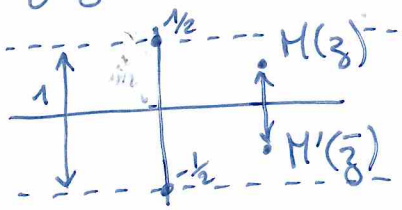
$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in \text{cercle}(A, \sqrt{2}) \\ M \in \text{cercle}(B, \sqrt{2}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow M(1)$ ou $M(1+2i)$

$\mathcal{S} = \{1, 1+2i\}$

---

3) $|z - \bar{z}| \leq 1 \Leftrightarrow |2iy| \leq 1 \Leftrightarrow |y| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq 1$



si $M(z)$ et $M'(\bar{z})$ alors $|z - \bar{z}| \leq 1 \Leftrightarrow MM' \leq 1$

$\Leftrightarrow$ M est dans la bande horizontale centrée sur l'axe des abscisses et de largeur 1

$\mathcal{S} = \{ x+iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \}$.

---

4) $|z+1| > |z-i|$

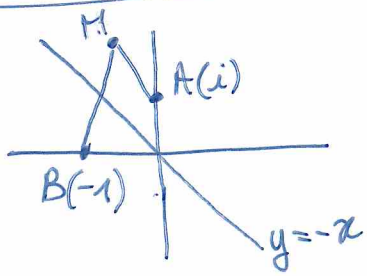
$\Leftrightarrow |x+1+iy| > |x+i(y-1)|$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 > x^2 + (y-1)^2$

$\Leftrightarrow 2x > -2y$

$\Leftrightarrow y > -x$

$\mathcal{S} = \{ x+iy \mid x, y \in \mathbb{R}, y > -x \}$



Si $A(i)$, $B(-1)$ et $M(z)$ alors $|z+1| > |z-i|$

$\Leftrightarrow BM > AM$

$\Leftrightarrow$ M est plus proche de A que de B

$\Leftrightarrow$ M est au-dessus de la droite d'équation $y = -x$